10. $\frac{13}{24}$ 【解析】由题可知，组成几何体的小立方体的个数是 $4\times5\times6-2\times3\times4=120-24=96$，只有一面涂了颜色的小立方体的个数是 $4\times3\times2+2\times3\times2+2\times4\times2=24+12+16=52$，所以 P(恰好摸出只有一面涂了颜色的小立方体)$=\frac{52}{96}=\frac{13}{24}$. 故答案为$\frac{13}{24}$.

11.【解】(1)由题意可知一共有 9 张牌，其中“手机”有 2 张，则抽奖得到“手机”的概率是$\frac{2}{9}$. 故答案为$\frac{2}{9}$.

(2)根据题意设计如下(答案不唯一).

空气炸锅	洗衣液	谢谢参与
手机	谢谢参与	护眼灯
护眼灯	谢谢参与	护眼灯

翻奖牌背面

12.【解】(1)区域“D”所在扇形的圆心角为 90°，所以其未中奖的概率为$\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$.

(2)因为每购买 100 元商品，就能获得一次转动转盘的机会，98<100，所以小华不能获得转动转盘的机会，即获得购物券的概率是 0.

(3)因为 120>100，所以能获得一次转动转盘的机会.

①获得购物券的三个区域所在扇形圆心角之和为 $360°-90°=270°$，$\frac{270}{360}=\frac{3}{4}$，故她获得购物券的概率是$\frac{3}{4}$.

②5 元以上(包括 5 元)购物券区域所在扇形圆心角之和为 $360°-90°-135°=135°$，$\frac{135}{360}=\frac{3}{8}$，故她获得 5 元以上(包括 5 元)购物券的概率是$\frac{3}{8}$.

13. (1) $m+n=14$

(2)① 随机

②【解】因为所有可能的情况有 20 种，“盒中混入 1 支‘HB’铅笔”的情况有 m 种，

所以 P(盒中混入 1 支“HB”铅笔)$=\frac{m}{20}$.

因为 P(盒中混入 1 支“HB”铅笔)$=\frac{1}{4}$，

所以$\frac{m}{20}=\frac{1}{4}$，所以 $m=20\times\frac{1}{4}=5$.

因为 $m+n=14$，所以 $n=14-m=14-5=9$.

思路分析

先根据题图中的几何体计算出小立方体的个数以及只有一面涂了颜色的小立方体的个数，再根据概率公式列式进行计算即可.

第四章　三角形

1　认识三角形

课时 1　三角形及其内角和

刷基础

1. C 【解析】只有选项 C 中三根火柴棒首尾顺次相接. 故选 C.

2. 8　2 【解析】题图中的三角形有 $\triangle BDO$，$\triangle ABO$，$\triangle AOE$，$\triangle ABD$，$\triangle ADC$，$\triangle ABE$，$\triangle BCE$，$\triangle ABC$，共 8 个. 以 AE 为边的三角形有 $\triangle AOE$，$\triangle ABE$，共 2 个.

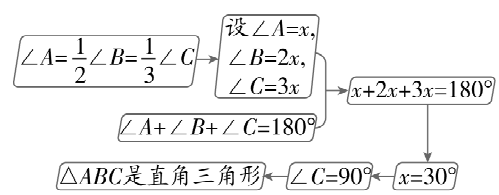
3. B 【解析】因为 $\angle A=53°$，$\angle B=62°$，所以 $\angle C=180°-\angle A-\angle B=65°$，故选 B.

4. 15° 【解析】因为 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A+\angle B=150°$，所以 $\angle C=30°$. 因为 $\angle C=2\angle A$，所以$\angle A=\frac{1}{2}\times30°=15°$. 故答案为 15°.

5. 30° 【解析】因为 $\angle C=80°$，$\angle A=40°$，所以 $\angle AOC=180°-\angle C-\angle A=180°-80°-40°=60°$，所以 $\angle BOD=\angle AOC=60°$. 因为 $\angle B=90°$，所以$\angle D=180°-\angle B-\angle BOD=180°-90°-60°=30°$，故答案为 30°.

6.【解】因为 $AC/\!/DE$，所以 $\angle BFC=\angle D=75°$，所以 $\angle AFB=180°-\angle BFC=180°-75°=105°$. 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\angle ABC=70°$，$\angle ACB=50°$，所以 $\angle A=180°-\angle ABC-\angle ACB=180°-70°-50°=60°$，所以 $\angle ABD=180°-\angle A-\angle AFB=180°-60°-105°=15°$.

7. B 【解析】



归纳总结

三角形是一个平面内由三条线段首尾顺次相连而组成的封闭图形.

8. B 【解析】

A	知道两个角，可以计算出第三个角的度数，因此可以判断出三角形类型	不符合题意
B	露出的角是锐角，其他两角都不知道，因此不能判断出三角形类型	符合题意
C	露出的角是一个钝角和一个锐角，因此是钝角三角形	不符合题意
D	露出的角是钝角，因此是钝角三角形	不符合题意

故选 B.

刷有所得

含有一个锐角的三角形有可能是锐角三角形，有可能是直角三角形，还有可能是钝角三角形.

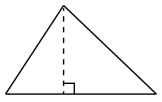
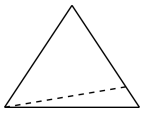
9. 钝角 【解析】因为一个三角形有两个内角的度数都小于 45°，所以第三个内角的度数大于 90°，所以这个三角形是钝角三角形. 故答案为钝角.

10. C 【解析】由题意知，另一个锐角的度数为 $90°-65°=25°$，故选 C.

11. 35 【解析】设较小锐角的度数为 x，则较大锐角的度数为 $x+20°$. 根据题意得 $x+x+20°=90°$，解得 $x=35°$，所以较小锐角的度数为 35°. 故答案为 35.

刷提升

1. A 【解析】

图示	结果	结论
	得到两个直角三角形	因为剪开的边上的两个角是邻补角，所以两个角不可能都是锐角，故这两个三角形不可能都是锐角三角形
	得到两个钝角三角形	
	得到一个锐角三角形和一个钝角三角形	

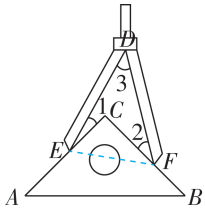
故选 A.

2. B 【解析】因为这些三角形的所有内角中，有 2 个直角，1 个钝角，15 个锐角，所以共有 $\frac{2+1+15}{3}=6$（个）三角形，其中有 2 个直角三角形，1 个钝角三角形，所以在这些三角形中有 $6-3=3$（个）锐角三角形，故选 B.

思路分析

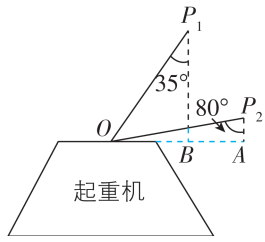
先根据角的个数，得出三角形的总数，再根据直角和钝角的个数，得出锐角三角形的个数.

3. 43 【解析】如图所示，连接 EF. 由题意可知，$\angle ACB=90°$，所以 $\angle CEF+\angle CFE=90°$. 又因为 $\angle 1=16°$，$\angle 2=31°$，所以 $\angle 1+\angle CEF+\angle 2+\angle CFE=16°+90°+31°=137°$，即 $\angle DEF+\angle DFE=137°$. 在 $\triangle DEF$ 中，$\angle 3+\angle DEF+\angle DFE=180°$，所以 $\angle 3=180°-(\angle DEF+\angle DFE)=180°-137°=43°$. 故答案为 43.



4. 120° 【解析】因为 $\angle C=135°$，$\angle A=15°$，所以 $\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-15°-135°=30°$. 因为 $\triangle ABC$ 沿着平行于 BC 的直线 DE 折叠，点 A 落到点 A' 处，所以 $\angle A'DE=\angle ADE=\angle B=30°$，所以 $\angle A'DB=180°-30°-30°=120°$. 故答案为 120°.

5. 45° 【解析】如图，由题意知 P_1B，P_2A 垂直于 OA. 在 Rt $\triangle OAP_2$ 中，$\angle AP_2O=80°$，所以 $\angle AOP_2=90°-80°=10°$；在 Rt $\triangle OBP_1$ 中，$\angle BP_1O=35°$，所以 $\angle BOP_1=90°-35°=55°$，所以 $\angle P_1OP_2=\angle P_1OA-\angle P_2OA=55°-10°=45°$，即吊杆前后两次的夹角 $\angle P_1OP_2$ 的度数为 45°. 故答案为 45°.



刷素养

6. 【解】(1) 因为在 $\triangle ADE$ 中，$\angle A+\angle ADE+\angle AED=180°$，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，所以 $\angle ADE+\angle AED=\angle ABC+\angle ACB$. 因为 $\angle ABC=\angle ACB$，所以 $\angle ADE+\angle AED=2\angle ABC$.

(2) $\angle ACD=2\angle DBF$. 理由如下：同 (1) 可得 $\angle ADC+\angle ACD=2\angle ABC$. 又因为 $\angle ABC=\angle DBF+\angle FBC$，所以 $\angle ADC+\angle ACD=2\angle DBF+2\angle FBC$. 因为 $\angle ADC=2\angle FBC$，所以 $\angle ACD=2\angle DBF$.

(3) 设 $\angle DBF=\alpha$，则 $\angle ACF=2\alpha$. 因为 $\angle FAC+\angle DBF=90°$，所以 $\angle FAC=90°-\alpha$. 因为 $\angle ADC=60°$，$\angle ADC=2\angle FBC$，所以 $\angle FBC=$

30°，所以 $\angle ABC=\angle DBF+\angle FBC=30°+\alpha$. 因为在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180°$，$\angle ABC=\angle ACB$，所以 $\angle BAC=180°-2(30°+\alpha)=120°-2\alpha$，所以 $\angle BAF=\angle BAC-\angle FAC=(120°-2\alpha)-(90°-\alpha)=30°-\alpha$. 因为在 $\triangle ABF$ 中，$\angle ABF+\angle AFB+\angle BAF=180°$，所以 $\alpha+30°-\alpha+\angle AFB=180°$，所以 $\angle AFB=150°$.

课时 2　三角形的三边关系

刷基础

1. A　【解析】由题图可知 Q 表示的是等边三角形. 故选 A.

2.【解】题图中的等腰三角形有 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle BDC$.

3. D　【解析】因为 A,B,C 是不在一条直线上的三个点，所以 A,B,C 三点是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，所以满足三边关系：$AB+AC>BC$，$BC+AC>AB$，$AB+BC>AC$，所以 A、B、C 正确，不符合题意，D 错误，符合题意. 故选 D.

4. C　【解析】

选项	理由	能否摆成三角形
A	3+4=7	不能
B	6+8<15	不能
C	12−5<13<12+5	能
D	5+5<11	不能

故选 C.

5. 3　【解析】因为三角形三边长分别为 2，x，13，所以 $13-2<x<13+2$，即 $11<x<15$. 因为 x 为正整数，所以 x 可以为 12，13，14，所以符合要求的三角形有 3 个. 故答案为 3.

6. B　【解析】设公园到车站的距离是 x km. 由三角形三边关系可得 $5-3<x<5+3$，所以 $2<x<8$，所以公园到车站的距离可能是 5 km. 故选 B.

7.【解】(1)因为 $|a-b|+|b-c|=0$，

所以 $a-b=0$ 且 $b-c=0$，

所以 $a=b=c$，

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

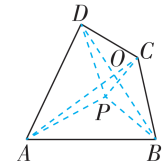
(2)因为 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，

所以 $a-b-c<0$，$b-c-a<0$，$c-a-b<0$，

所以原式 $=b+c-a+a+c-b+a+b-c=a+b+c$.

8.【解】当维修站 O 建在 AC，BD 的交点处时，维修站到四口油井的距离之和最短.

理由：如图，连接 AC，BD 交于点 O，维修站 O 应建在 AC，BD 的交点处，则维修站到四口油井的距离和为 $AC+BD$. 在四边形 $ABCD$ 内任选一点 P（不与 O 点重合），分别连接 PA，PB，PC，PD. 在 $\triangle APC$ 中，$PA+PC>AC$；在 $\triangle BPD$ 中，$PB+PD>BD$，故 $PA+PC+PB+PD>AC+BD$，所以当维修站 O 建在 AC，BD 的交点处时，才能使它到四口油井的距离之和最短.



刷易错

9. C　【解析】①当该等腰三角形的腰长为 3 cm 时，底边长为 $13-2\times3=7$(cm)，此时该等腰三角形的三边长分别为 3 cm，3 cm，7 cm. 因为 $3+3<7$，所以不符合构成三角形的条件，不合题意，舍去. ②当底边长为 3 cm 时，腰长为 $(13-3)\div2=5$(cm)，此时该等腰三角形的三边长分别为 3 cm，5 cm，5 cm. 因为 $3+5>5$，所以符合构成三角形的条件. 综上，该等腰三角形的腰长是 5 cm. 故选 C.

课时 3　三角形的高(线)、中线和角平分线

刷基础

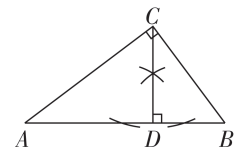
1. D　【解析】

选项	理由	判断
A	AD 与 BC 不垂直	×
B	AD 与 BC 不垂直	×
C	AD 与 BC 不垂直	×
D	$AD\perp BC$	√

故选 D.

2. A　【解析】一个三角形的三条高的交点始终在其内部，则这个三角形是锐角三角形. 故选 A.

3.【解】(1)如图，CD 即为所求.



(2)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，$AB=10$，所以 $\frac{1}{2}CD\cdot AB=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，所以 $CD=8\times6\div10=4.8$.

刷有所得

注意等腰三角形是包含等边三角形的.

易错警示

解决本题时应注意分两种情况，而且不能忽略一个重要的因素，即“三角形三边关系需满足任意两边之和大于第三边”，对出现的情况应逐一验证，确定取舍.

易错警示

三角形一边上的高线需满足其垂足在这一边上或者这一边所在的直线上.

易错警示

注意题目中要求的 x 为正整数这一条件，如果没有这个条件，符合要求的三角形会有无数个.

4. B 【解析】因为 AD,BE,CF 是△ABC 的三条中线，所以 $AC=2AE=2EC$，$AB=2BF=2AF$，$BC=2BD=2DC$，故 A、C、D 选项都不正确，B 选项正确. 故选 B.

5. B 【解析】因为 AD 为 BC 边上的中线，所以 $BD=DC$. 因为△ACD 的周长为 8，所以 $AC+CD+AD=8$，所以 $BD+AD=8-3=5$，所以△ABD 的周长为 $AB+BD+AD=4+5=9$. 故选 B.

6. 4 【解析】因为 E 是 AD 的中点，所以 $S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle AEC}=2$. 因为 AD 为中线，所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ACD}=4$，故答案为 4.

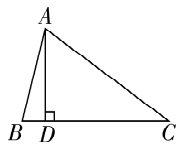
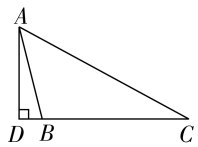
7. D 【解析】因为 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，所以 BD 是△ABC 的角平分线，CE 是△BCD 的角平分线，$\angle ACB=\angle 4+\angle 3=2\angle 3$，所以选项 A、B、C 均正确，选项 D 错误，故选 D.

8. A 【解析】由折叠知，$\angle DAE=\angle CAE$，$\angle AEC=\angle AED=90°$. 因为 AD 为△ABE 的角平分线，所以 $\angle BAD=\angle DAE$，所以 $\angle BAD=\angle DAE=\angle CAE$. 因为 $\angle BAC=60°$，所以 $\angle BAD=\angle DAE=\angle CAE=20°$. 因为 $\angle AEC=90°$，所以 $\angle C=180°-\angle AEC-\angle CAE=180°-90°-20°=70°$. 故选 A.

9. A 【解析】因为三角形硬纸板处于平衡状态，所以这个点为三角形的重心，由题图可知点 N 可能为该三角形的重心. 故选 A.

刷易错

10. 5 或 7 【解析】

分类	当△ABC 为锐角三角形时	当△ABC 为钝角三角形时
图示		
解析	因为 AD 是△ABC 的高，$BD=1$，$AD=4$，△ABC 的面积为 12，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}(CD+BD)\times 4=\frac{1}{2}(CD+1)\times 4=12$，所以 $CD=5$	因为 AD 是△ABC 的高，$BD=1$，$AD=4$，△ABC 的面积为 12，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=12$，即 $12=\frac{1}{2}BC\times 4$，解得 $BC=6$，所以 $CD=BC+BD=6+1=7$

易错警示 题干中未给出图形，所以需要分△ABC 为锐角三角形和钝角三角形两种情况来讨论，切记不能漏解.

刷提升

1. A 【解析】因为 AD,CE 是△ABC 的两条高，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}BC\cdot AD$. 因为 $AB=4$，$CB=\frac{16}{5}$，所以 $4\times CE=\frac{16}{5}\times AD$，所以 $CE=\frac{4}{5}AD$. 因为 $CE+AD=7$，所以 $\frac{4}{5}AD+AD=7$，所以 $AD=\frac{35}{9}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times\frac{35}{9}=\frac{56}{9}$. 故选 A.

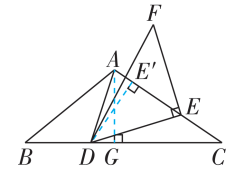
2. B 【解析】因为 $CE=\frac{1}{3}BC=4$，所以 $BC=3CE=3\times 4=12$. 因为 $BD=\frac{1}{4}BC$，所以 $BD=\frac{1}{4}\times 12=3$. 因为 CD,BE 是△ABC 的两条中线，所以 $AB=2BD=6$，$AC=2CE=8$，所以△ABC 的周长是 $6+8+12=26$，故选 B.

思路分析 先根据点 H 在三角形的外部可以判断三角形是钝角三角形，再分两种情况讨论：① $\angle C$ 为钝角；② $\angle A$ 为钝角，看这两种情况时三角形的两条高所在直线是否在三角形的外部即可.

3. D 【解析】因为高 AD 与高 BE 所在直线交于点 H，点 H 在△ABC 的外部，所以△ABC 是钝角三角形. 因为 $\angle B=45°$，所以 $\angle C$ 是钝角或 $\angle A$ 是钝角. 当 $\angle C$ 是钝角时，$\angle A$ 是锐角，高 AD 的垂足在 BC 的延长线上，高 BE 的垂足在 AC 的延长线上，它们所在直线的交点在△ABC 的外部；当 $\angle A$ 是钝角时，$\angle C$ 是锐角，高 AD 的垂足在 BC 上，高 BE 的垂足在 CA 的延长线上，它们所在直线的交点在△ABC 的外部. 综上，$\angle C$ 是钝角或锐角. 故选 D.

4. 1 【解析】因为 D 为 BC 中点，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4=2(\text{cm}^2)$. 同理得 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 2=1(\text{cm}^2)$，所以 $S_{\triangle BCE}=2\ \text{cm}^2$. 因为 F 为 EC 的中点，所以 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\times 2=1(\text{cm}^2)$. 故答案为 1.

5. $\frac{32}{9}$ 【解析】过点 A 作 $AG\perp BC$ 于 G，如图所示.



因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AG=2$，所以 $BD\cdot AG=4$. 因为 $CD=2BD$，所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AG=4$. 因为 $DE=EF$，$\angle DEF=$

$90°$，所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE^2$，所以当 DE 取得最小值时，$\triangle DEF$ 的面积取得最小值. 过点 D 作 $DE'\perp AC$ 于 E'，当 $DE\perp AC$，即点 E 与 E' 重合时，DE 取得最小值，所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot DE'=4$，所以 $DE'=\frac{8}{3}$，所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE'^2=\frac{32}{9}$，所以 $\triangle DEF$ 面积的最小值为 $\frac{32}{9}$，故答案为 $\frac{32}{9}$.

6.【解】(1) 因为 $\angle B=70°$，$\angle C=30°$，所以 $\angle BAC=180°-70°-30°=80°$. 因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=40°$. 因为 $AD\perp BC$，$\angle B=70°$，所以 $\angle BAD=90°-\angle B=90°-70°=20°$，所以 $\angle DAE=40°-20°=20°$.

(2) 能. 因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{180°-\angle B-\angle C}{2}$. 因为 $AD\perp BC$，所以 $\angle BAD=90°-\angle B$，所以 $\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=\frac{180°-\angle B-\angle C}{2}-(90°-\angle B)=\frac{\angle B-\angle C}{2}$. 因为 $\angle B-\angle C=40°$，所以 $\angle DAE=20°$.

刷素养

7.【解】(1) 因为 $\angle B=90°$，$AB=4$，$BC=6$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times4\times6=12$，故答案为 12.

(2) 因为 $BC=6$，点 D 是 BC 边的中点，所以 $CD=3$. 因为点 P 速度为每秒 2 个单位长度，所以当 $0\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$ 时，点 P 在 CD 上，$PD=CD-PC=3-2t$；当 $\frac{3}{2}<t\leqslant4$ 时，点 P 在 AD 上，$PD=2t-3$.

(3) 因为 $AB=4$，所以 $CP=\frac{1}{3}AB=\frac{4}{3}$，所以易知点 P 在 CD 上，所以 $2t=\frac{4}{3}$，解得 $t=\frac{2}{3}$.

(4) 因为 $BC=6$，点 D 是 BC 边的中点，所以 $BD=3$. 因为 $\angle B=90°$，$AB=4$，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\times BD=\frac{1}{2}\times4\times3=6$. 因为 $3S_{\triangle ACP}=2S_{\triangle ABD}$，所以 $S_{\triangle ACP}=4$. 当点 P 在 CD 上时，$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AB\times PC=\frac{1}{2}\times4\times PC=4$，解得 $PC=2$，所以 $t=\frac{2}{2}=1$；当点 P 在 AD 上时，因为 $S_{\triangle ACP}=4$，$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AB\times CD=6$，所以 $\frac{PA}{AD}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，所以 $DP=\frac{1}{3}AD=\frac{5}{3}$，所以 $2t-3=\frac{5}{3}$，解得 $t=\frac{7}{3}$.

综上，t 的值为 1 或 $\frac{7}{3}$.

重难专题 5　三角形中线、高线的应用

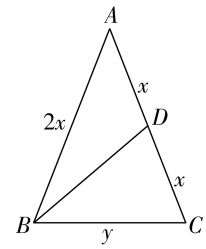
刷难关

关键点拨 分两种情况进行讨论：①当 $\triangle ABD$ 的周长大于 $\triangle ADC$ 的周长时；②当 $\triangle ADC$ 的周长大于 $\triangle ABD$ 的周长时.

1. C　**【解析】**①当 $\triangle ABD$ 的周长大于 $\triangle ADC$ 的周长时，因为 AD 为 BC 边上的中线，所以 $BD=CD$，所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长差为 $(AB+AD+BD)-(AC+AD+CD)=AB-AC$. 因为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长差为 5，$AC=8$，所以 $AB-8=5$，解得 $AB=13$. ②当 $\triangle ADC$ 的周长大于 $\triangle ABD$ 的周长时，因为 AD 为 BC 边上的中线，所以 $BD=CD$，所以 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$ 的周长差为 $(AC+AD+CD)-(AB+AD+BD)=AC-AB$. 因为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长差为 5，$AC=8$，所以 $8-AB=5$，解得 $AB=3$. 综上，$AB=3$ 或 13，故选 C.

易错警示 等腰三角形一腰上的中线将它的周长分为 12 cm 和 9 cm 两部分，但没有明确哪部分是 12 cm，哪部分是 9 cm，因此有两种情况，需要分类讨论.

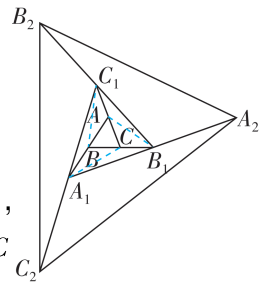
2. B　**【解析】**根据题意画出图形，如图所示. 设等腰三角形的腰长 $AB=AC=2x$ cm，$BC=y$ cm. 因为 BD 是腰上的中线，所以 $AD=DC=x$ cm. ①若 $AB+AD=12$ cm，则 $2x+x=12$，解得 $x=4$，此时 $BC=5$ cm，$AB=AC=8$ cm. 因为 $5+8>8$，所以能组成三角形，所以等腰三角形的腰长为 8 cm. ②若 $AB+AD=9$ cm，则 $2x+x=9$，解得 $x=3$，此时 $BC=9$ cm，$AB=AC=6$ cm. 因为 $6+6>9$，所以能组成三角形，所以等腰三角形的腰长为 6 cm. 故选 B.



3. D　**【解析】**因为 D,E,F 分别是 BC,AD,AC 上的中点，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle BDE}=$

$\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$，$S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADF}$，所以 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{阴影部分}=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{8}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{8}{3}S_{阴影部分}=\frac{8}{3}\times6=16$，故选 D.

4. A 【解析】如图，连接 AB_1，BC_1，CA_1，根据等底同高的三角形面积相等，可得 $\triangle A_1BC$，$\triangle A_1B_1C$，$\triangle AB_1C$，$\triangle AB_1C_1$，$\triangle ABC_1$，$\triangle A_1BC_1$，$\triangle ABC$ 的面积都相等，



所以 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=7S_{\triangle ABC}$，同理可得 $S_{\triangle A_2B_2C_2}=7S_{\triangle A_1B_1C_1}=7^2S_{\triangle ABC}$，…，则 $S_{\triangle A_{2\,024}B_{2\,024}C_{2\,024}}=7^{2\,024}S_{\triangle ABC}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=1$，所以 $\triangle A_{2\,024}B_{2\,024}C_{2\,024}$ 的面积为 $7^{2\,024}$. 故选 A.

5. 4 【解析】因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times12=6$. 因为 $AG:GD=2:1$，所以 $S_{\triangle ABG}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{2}{3}\times6=4$，$S_{\triangle AGC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ACD}=\frac{2}{3}\times6=4$. 又因为 BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以点 E，F 分别是 AC，AB 的中点，所以 $S_{\triangle GFB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}\times4=2$，$S_{\triangle GCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle AGC}=\frac{1}{2}\times4=2$，所以 $S_{阴影}=S_{\triangle GFB}+S_{\triangle GCE}=2+2=4$. 故答案为 4.

6.【解】(1) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$. 故答案为 $\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

(2) 由 (1) 可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，则 $\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times CD$，解得 $CD=\frac{12}{5}$.

(3) 因为 $AH\perp BC$，$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$，所以 $\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot PM+\frac{1}{2}AC\cdot PN$，所以 $\frac{1}{2}\times10\times12=\frac{1}{2}\times13PM+\frac{1}{2}\times13PN=\frac{1}{2}\times13(PM+PN)$，所以 $PM+PN=\frac{120}{13}$.

思路分析 分 AD 在 $\triangle ABC$ 内部与在 $\triangle ABC$ 外部两种情况求解即可.

7. D 【解析】当 AD 在 $\triangle ABC$ 内部时，如图 (1). 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 24，AD 是 BC 边上的高，$AD=4$，$CD=5$，所以 $\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}(BD+CD)\cdot AD=\frac{1}{2}(BD+5)\times4=24$，所以 $BD=7$.

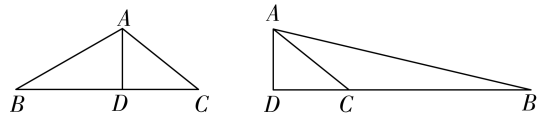


图 (1)　　图 (2)

当 AD 在 $\triangle ABC$ 外部时，如图 (2).
因为 $\triangle ABC$ 的面积为 24，AD 是 BC 边上的高，$AD=4$，$CD=5$，所以 $\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}BC\times4=24$，所以 $BC=12$，所以 $BD=BC+CD=12+5=17$.
综上所述，BD 的长为 7 或 17，故选 D.

2　全等三角形

刷基础

1. B 【解析】由 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$ 得，AB 与 CD 是对应边，故①不符合题意；AC 与 CA 是对应边，故②符合题意；$\angle BAC$ 与 $\angle DCA$ 是对应角，故③不符合题意，④符合题意. 综上所述，正确的结论是②④. 故选 B.

2. B 【解析】因为两个三角形全等，所以 $\angle1=180°-70°-50°=60°$. 故选 B.

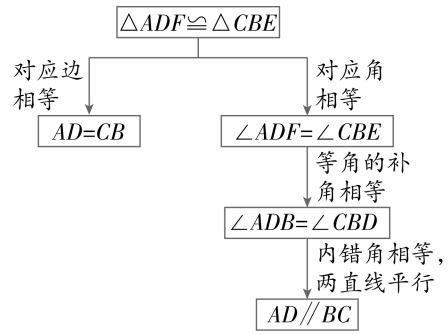
3. B 【解析】因为 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，所以 $BC=EF$. 因为 $CF=2$ cm，$BE=10$ cm，点 B，C，F，E 在同一条直线上，所以 $BC=EF=\frac{BE-CF}{2}=\frac{10-2}{2}=4$ (cm). 故选 B.

刷有所得 全等三角形的对应角相等.

4. 20° 【解析】因为 $\angle AME=\angle CMD=70°$，所以在 $\triangle AEM$ 中，$\angle1=180°-90°-70°=20°$.
因为 $\triangle ABE\cong\triangle ACF$，所以 $\angle EAB=\angle FAC$，
即 $\angle1+\angle CAB=\angle2+\angle CAB$，
所以 $\angle2=\angle1=20°$.

5. 1 【解析】因为 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，所以 $DF=AC=3$，$BC=EF=5$. 因为 $CF=7$，所以 $BF=CF-BC=2$，所以 $BD=DF-BF=3-2=1$. 故答案为 1.

6. **思路分析**



【解】(1)因为△ADF≌△CBE，所以 $AD=BC$(全等三角形的对应边相等)，故答案为 $AD=BC$，全等三角形的对应边相等.

(2)AD∥BC. 理由：

因为△ADF≌△CBE，所以∠ADF=∠CBE，

所以∠ADB=∠CBD，所以 AD∥BC.

7. B 【解析】全等三角形的周长相等，故①正确；全等三角形的面积相等，故②正确；全等三角形的对应边上的高相等(不是对应边上的高不一定相等)，故③不正确；全等三角形的对应边上的中线相等(不是对应边上的中线不一定相等)，故④不正确. 故选 B.

8. 8 【解析】设△DEF 中 EF 边上的高是 h cm. 由题意得 $\frac{1}{2}\times10\times h=40$，解得 $h=8$. 因为△ABC≌△DEF，所以△ABC 中 BC 边上的高=△DEF 中 EF 边上的高=8 cm. 故答案为 8.

刷有所得 全等三角形的对应边相等，对应角相等，且对应边上的中线、高线也分别相等.

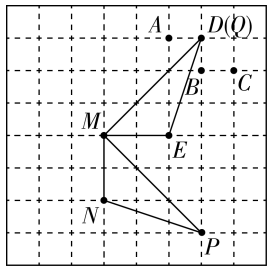
刷易错

9. 7.5 或 7 【解析】因为两个三角形全等，所以当 $4x+2=8$，$2y-2=10$ 时，解得 $x=1.5$，$y=6$，此时 $x+y=7.5$；当 $4x+2=10$，$2y-2=8$ 时，解得 $x=2$，$y=5$，此时 $x+y=7$. 综上，$x+y$ 的值是 7.5 或 7，故答案为 7.5 或 7.

易错警示 当两个全等三角形的对应关系未定时，需分情况讨论.

刷提升

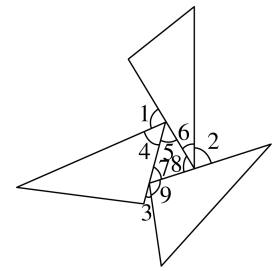
1. D 【解析】因为△MNP≌△MEQ，所以点 Q 应在图中的点 D 处，如图. 故选 D.



2. C 【解析】因为△ADB≌△EDB≌△EDC，所以∠A=∠BED=∠CED，∠ABD=∠EBD=∠C. 因为∠BED+∠CED=180°，所以∠BED=∠CED=90°，所以∠A=90°，所以∠ABC+∠C=90°，所以 $\frac{3}{2}$∠ABC=90°，所以∠ABC=60°. 故选 C.

3. 7 【解析】因为△CBD≌△EBD，所以 $CD=DE$，$BE=BC=6$ cm，所以 $AE=AB-BE=8-6=2$(cm)，所以△ADE 的周长为 $AE+DE+AD=AE+CD+AD=AE+AC=2+5=7$(cm). 故答案为 7.

4. 180° 【解析】如图所示，由图形可得∠1+∠4+∠5+∠8+∠6+∠2+∠3+∠9+∠7=540°. 因为三个三角形全等，所以∠4+∠9+∠6=180°. 又因为∠5+∠7+∠8=180°，所以∠1+∠2+∠3+180°+180°=540°，所以∠1+∠2+∠3 的度数是 180°.



5. 53 【解析】因为△ABC≌△ADE，所以∠BAC=∠DAE，∠B=∠D，所以∠BAG=∠CAE. 因为 BC⊥AD，所以∠AGC=90°，所以∠CAG=90°−∠ACG=90°−78°=12°. 因为∠EAB=118°，所以∠BAG+∠CAE=118°−12°=106°，所以∠BAG=$\frac{1}{2}$×106°=53°. 因为∠DGF=∠AGB，∠D=∠B，所以∠DFG=∠BAG=53°. 故答案为 53.

6. 【解】(1)AC⊥CE. 理由如下：因为 AB⊥BD，所以∠B=90°，所以∠A+∠ACB=90°. 因为△ABC≌△CDE，所以∠A=∠DCE，所以∠DCE+∠ACB=90°. 因为∠DCE+∠ACB+∠ACE=180°，所以∠ACE=90°，所以 AC⊥CE.

(2)AC⊥BE. 理由如下：因为△ABC≌△BDE，所以∠A=∠EBD. 因为∠ABC=90°，所以∠A+∠ACB=90°，所以∠EBD+∠ACB=90°，所以∠BFC=90°，所以 AC⊥BE.

(3)因为 $S_{\triangle ABC}=12$，$AF:CF=3:1$，所以 $S_{\triangle BFC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=3$. 因为△$ABC$≌△$BDE$，所以 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ABC}=12$，所以四边形 $CDEF$ 的面积为 12−3=9.

刷素养

7. 思路分析

(2) 以点B,P,D为顶点的三角形和以点C,P,Q为顶点的三角形全等 → 分类讨论 → BD与CP是对应边 / BP与CP是对应边 → 分别列方程求解

【解】(1)由题意,得 $BP=3t$ 厘米.

因为 $BC=8$ 厘米,所以 $PC=(8-3t)$ 厘米.

(2)由题意知,需分两种情况讨论:

若 $\triangle BDP\cong\triangle CPQ$,则 $BD=CP$,$BP=CQ$.

因为 $AB=10$ 厘米,点 D 为 AB 的中点,

所以 $BD=\frac{1}{2}AB=5$ 厘米.

由题意得 $BP=3t$ 厘米,$CP=(8-3t)$ 厘米,$CQ=at$ 厘米,

所以 $5=8-3t$,$3t=at$,

解得 $t=1$,$a=3$.

若 $\triangle BDP\cong\triangle CQP$,则 $BP=CP$,$BD=CQ$,

所以 $3t=8-3t$,$5=at$,

解得 $t=\frac{4}{3}$,$a=\frac{15}{4}$.

综上所述,$a=3$,$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$,$t=\frac{4}{3}$.

易错警示

(2)两个全等的三角形如果没有用≌符号连接,那么它们之间顶点的对应关系需要分类讨论,不要漏解.

3　探索三角形全等的条件

课时1　利用三边(SSS)判定三角形全等

刷基础

1. C　【解析】在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中,$\begin{cases}AB=AC,\\AE=AE,\\BE=CE,\end{cases}$

所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACE$(SSS). 故选 C.

2. SSS　【解析】小陈同学说法的依据是 SSS,故答案为 SSS.

3. 100°　【解析】在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 中,$\begin{cases}AD=ED,\\BD=BD,\\AB=EB,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABD\cong\triangle EBD$(SSS),

所以 $\angle BED=\angle A=80°$,所以 $\angle CED=180°-\angle BED=100°$,故答案为 100°.

思路分析

根据 SSS 判定 $\triangle ABD\cong\triangle EBD$,得到 $\angle BED$ 的度数,再利用平角的定义求解即可.

4. 【解】因为 $AE+CD=AD$,$AC+CD=AD$,

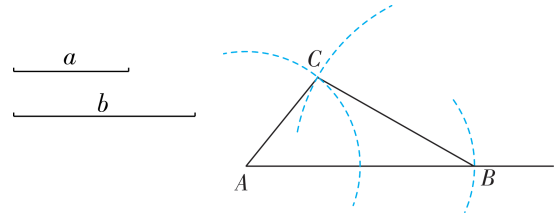
所以 $AE=AC$.

在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle CAB$ 中,$\begin{cases}ED=CB,\\AE=AC,\\AD=AB,\end{cases}$

所以 $\triangle EAD\cong\triangle CAB$(SSS).

5. SSS　115　【解析】由题意得,$AD=BC$,$CD=AB$. 因为 $AC=CA$,所以 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$(SSS),所以 $\angle BAC=\angle ACD$,所以 $\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD=\angle BCA+\angle BAC=180°-\angle B=180°-65°=115°$. 故答案为 SSS,115.

6. 【解】如图,$\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.



7. D　【解析】这样做的几何原理是三角形的稳定性. 故选 D.

8. B　【解析】三角形具有稳定性,四边形不具有稳定性. 从四个图形的组成来看,只有 B 选项中的图形都是由三角形组成的,故具有稳定性;A、C、D 选项中的图形均含有四边形,故不具有稳定性. 故选 B.

课时2　利用两角一边(ASA 或 AAS)判定三角形全等

刷基础

1. B　【解析】由①②能确定原三角形的两角和它们的夹边,则带碎片①②能配成和原来一样的三角形的玻璃,所以 A 选项不符合题意;由②③只能确定原三角形的一个角,则带碎片②③不能配成和原来一样的三角形的玻璃,所以 B 选项符合题意;由①④能确定原三角形的两角和它们的夹边,则带碎片①④能配成和原来一样的三角形的玻璃,所以 C 选项不符合题意;由①③能确定原三角形的三条边,则带碎片①③能配成和原来一样的三角形的玻璃,所以 D 选项不符合题意. 故选 B.

2. B　【解析】由已知无法确定甲三角形与 $\triangle ABC$ 全等. 因为乙三角形与 $\triangle ABC$ 有两角及其夹边相等,所以乙三角形与 $\triangle ABC$ 全等. 因为 $180°-50°-72°=58°$,所以丙三角形与 $\triangle ABC$ 有两角及其夹边相等,所以丙三角形与 $\triangle ABC$ 全等. 故选 B.

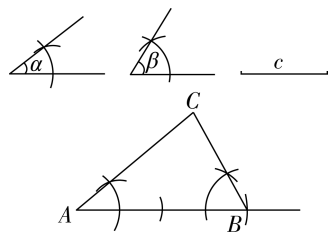
3. 【解】(1)因为 AD 是 BC 边上的中线,所以 $BD=CD$. 因为 $BE/\!/CF$,所以 $\angle DBE=\angle DCF$.

在△BDE 和△CDF 中，$\begin{cases}\angle DBE=\angle DCF,\\ BD=CD,\\ \angle BDE=\angle CDF,\end{cases}$ 所以△BDE≌△CDF(ASA).

(2)因为 $AE=13$，$AF=7$，所以 $EF=AE-AF=13-7=6$. 因为△BDE≌△CDF，所以 $DE=DF$. 因为 $DE+DF=EF=6$，所以 $DE=3$.

4. A 【解析】根据作图知，$BC=a$，$\angle ABC=\angle 1$，$\angle BCA=\angle 1$，所以作△ABC 的依据为角边角，故 A 选项正确，符合题意；弧 EF 是以点 B 为圆心，OD 长为半径画的，故 B 选项错误，不符合题意；弧 MN 是以点 B 为圆心，a 为半径画的，故 C 选项错误，不符合题意；弧 GH 是以点 Q 为圆心，DK 长为半径画的，故 D 选项错误，不符合题意. 故选 A.

5.【解】如图，△ABC 即为所求作的三角形.



6. C 【解析】补充条件 $\angle D=\angle C$. 在△ACB 与△BDA 中，$\begin{cases}\angle C=\angle D,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AB=BA,\end{cases}$ 所以△ACB≌△BDA(AAS). 故选 C.

7. 1.5 cm 【解析】因为 $BE\perp CE$，$AD\perp CE$，所以 $\angle E=\angle ADC=90°$，所以 $\angle DAC+\angle DCA=90°$. 因为 $\angle ACB=90°$，所以 $\angle ECB+\angle DCA=90°$，所以 $\angle DAC=\angle ECB$. 在△ACD 和△CBE 中，$\angle DAC=\angle ECB$，$\angle ADC=\angle E$，$AC=BC$，所以△ACD≌△CBE，所以 $CD=BE=0.5$ cm，$EC=AD=2$ cm，所以 $DE=CE-CD=1.5$ cm.

8.【解】因为 $BF=CE$，所以 $BF+CF=CE+CF$，即 $BC=EF$. 在△ABC 和△DEF 中，$\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ \angle B=\angle E,\\ BC=EF,\end{cases}$ 所以△ABC≌△DEF(AAS).

刷提升

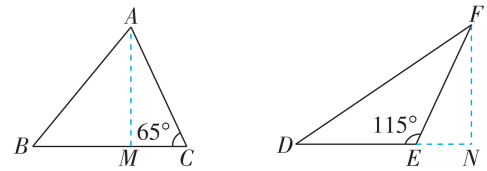
1. A 【解析】因为 $\angle 1=\angle 2=\angle BAC$，$\angle 1=180°-\angle AEB=\angle BAE+\angle ABE$，$\angle BAC=\angle BAE+\angle CAF$，$\angle 2=180°-\angle AFC=\angle FCA+\angle CAF$，所以 $\angle ABE=\angle CAF$，$\angle BAE=\angle FCA$.

在△ABE 和△CAF 中，$\begin{cases}\angle ABE=\angle CAF,\\ AB=AC,\\ \angle BAE=\angle ACF,\end{cases}$

所以△ABE≌△CAF(ASA)，所以△ACF 的面积等于△ABE 的面积，所以△ACF 与△BDE 的面积之和等于△ABE 与△BDE 的面积之和，即△ABD 的面积. 因为△ABC 的面积为 18，$CD=2BD$，所以△ABD 的面积为 $\frac{1}{3}\times 18=6$，所以△ACF 与△BDE 的面积之和为 6. 故选 A.

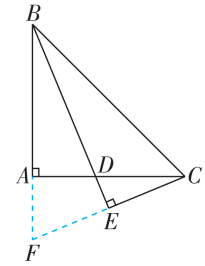
思路分析：过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，过点 F 作 $FN\perp DE$ 交 DE 的延长线于点 N，则 $AM=h_1$，$FN=h_2$，由 AAS 得△AMC≌△FNE，得 $AM=FN$，即可得出结论.

2. A 【解析】过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，过点 F 作 $FN\perp DE$ 交 DE 的延长线于点 N，如图所示，则 $AM=h_1$，$FN=h_2$. 因为 $AM\perp BC$，$FN\perp DE$，所以 $\angle AMC=\angle FNE=90°$. 因为 $\angle FEN=180°-\angle DEF=65°$，所以 $\angle ACM=\angle FEN$. 在△AMC 和△FNE 中，$\begin{cases}\angle AMC=\angle FNE,\\ \angle ACM=\angle FEN,\\ AC=EF,\end{cases}$ 所以△AMC≌△FNE(AAS)，所以 $AM=FN$，所以 $h_1=h_2$，故选 A.



思路分析：延长 BA，CE 相交于点 F，利用"角边角"判定△BCE 和△BFE 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $CE=EF$. 根据同角的余角相等得出 $\angle ABD=\angle ACF$，然后利用"角边角"判定△ABD 和△ACF 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $BD=CF$，最后求解即可.

3. 4 【解析】如图，延长 BA，CE 相交于点 F. 因为 BD 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle ABD=\angle CBD$. 在△BFE 和△BCE 中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle CBD,\\ BE=BE,\\ \angle BEF=\angle BEC=90°,\end{cases}$ 所以△BFE≌△BCE(ASA)，所以 $EF=CE$.



因为 $\angle BAC=90°$，$CE\perp BD$，所以 $\angle ACF+\angle F=90°$，$\angle ABD+\angle F=90°$，所以 $\angle ABD=\angle ACF$.

在△ABD 和△ACF 中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle ACF,\\ AB=AC,\\ \angle BAC=\angle CAF=90°,\end{cases}$

所以△ABD≌△ACF(ASA)，所以 $BD=CF$. 因为 $CF=CE+EF=2CE$，所以 $BD=2CE=8$，所以 $CE=4$. 故答案为 4.

4. $\frac{1}{2}$ 【解析】设 $CF=x$，则 $BC=3x$，所以 $BC=AC=3x$，所以 $AF=AC+CF=4x$. 因为 $EG/\!/CD$，

$EA\perp AD$，所以$\angle ACD=\angle DCG=\angle AGE=90°$，$\angle EAD=90°$，所以$\angle DAC+\angle D=90°=\angle DAC+\angle EAG$，所以$\angle D=\angle EAG$. 又因为$DA=EA$，所以$\triangle ACD\cong\triangle EGA$（AAS），所以$AC=EG=3x$，$CD=AG$，所以$BC=EG$. 因为$\angle EFG=\angle CFB$，$\angle BCF=\angle G$，所以$\triangle BCF\cong\triangle EGF$（AAS），所以$FG=CF=x$，所以$AG=5x$，所以$CD=AG=5x$，所以$BD=2x$，所以$\frac{BD}{AF}=\frac{1}{2}$，故答案为$\frac{1}{2}$.

5.【解】（1）$\angle EDC=180°-\angle BDA-\angle ADE=180°-120°-50°=10°$. 点$D$从$B$向$C$运动时，$\angle BDA$逐渐变小. 故答案为10°，小.

（2）当DC的长为4时，$\triangle ABD\cong\triangle DCE$.

理由如下：由题意得$\angle ADC=180°-\angle ADB=\angle B+\angle BAD$，即$\angle ADE+\angle CDE=\angle B+\angle BAD$. 因为$\angle B=\angle ADE=50°$，所以$\angle CDE=\angle BAD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle DCE$中，$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ BA=CD=4,\\ \angle BAD=\angle CDE,\end{cases}$

所以$\triangle ABD\cong\triangle DCE$（ASA）.

刷素养

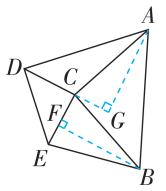
6.【解】（1）因为$\triangle ABP$与$\triangle CBP$在AP，CP边上的高相等，所以当$AP=CP=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8=4$时，$\triangle ABP$与$\triangle CBP$面积相等. 因为$BC=9$，$AB=10$，所以$BC\neq AB$，所以$\triangle ABP$与$\triangle CBP$不全等，所以此时$\triangle ABP$与$\triangle CBP$是“偏等积三角形”. 故答案为4.

（2）因为$\triangle ABD$与$\triangle ACD$是“偏等积三角形”，且$\triangle ABD$与$\triangle ACD$在BD，CD边上的高相等，所以$BD=CD$. 因为$CE/\!/AB$，所以$\angle E=\angle BAD$.

在$\triangle ECD$和$\triangle ABD$中，$\begin{cases}\angle E=\angle BAD,\\ \angle EDC=\angle ADB,\\ CD=BD,\end{cases}$

所以$\triangle ECD\cong\triangle ABD$（AAS），所以$ED=AD$，$EC=AB=2$. 因为$AC-EC<AE<AC+EC$，且$AC=6$，$AE=2AD$，所以$6-2<2AD<6+2$，所以$2<AD<4$. 因为线段$AD$的长度为正整数，所以$AD=3$. 故答案为3.

（3）$\triangle ACD$与$\triangle BCE$是“偏等积三角形”. 理由：因为$\angle ACB=\angle DCE=90°$，所以$\angle ACD+\angle BCE=180°$. 因为$0°<\angle BCE<90°$，所以$\angle ACD>90°$，所以$\angle ACD\neq\angle BCE$. 因为$CA=CB$，$CD=CE$，所以$\triangle ACD$与$\triangle BCE$不全等. 如图，作$BF\perp CE$于点$F$，$AG\perp DC$交$DC$的延长线于点$G$，则$\angle G=\angle BFC=90°$. 因为$\angle ECG=180°-\angle DCE=90°$，所以$\angle ACG=\angle BCF=90°-\angle BCG$.



在$\triangle ACG$和$\triangle BCF$中，

$\begin{cases}\angle G=\angle BFC,\\ \angle ACG=\angle BCF,\\ CA=CB,\end{cases}$

所以$\triangle ACG\cong\triangle BCF$（AAS），所以$AG=BF$，所以$\frac{1}{2}CD\cdot AG=\frac{1}{2}CE\cdot BF$，所以$\triangle ACD$与$\triangle BCE$面积相等，所以$\triangle ACD$与$\triangle BCE$是“偏等积三角形”.

思路分析

设$CF=x$，由AAS可得$\triangle ACD\cong\triangle EGA$，可得$AC=EG=3x$，$CD=AG$，所以$BC=EG$，由AAS可得$\triangle BCF\cong\triangle EGF$，可得$FG=CF=x$，进而可得$BD=2x$，即可求解.

思路分析

（3）先根据题目条件推得$\angle ACD\neq\angle BCE$，再由$CA=CB$，$CD=CE$，说明$\triangle ACD$与$\triangle BCE$不全等，作$BF\perp CE$于点F，$AG\perp DC$交DC的延长线于点G，可利用“AAS”判定$\triangle ACG\cong\triangle BCF$，得$AG=BF$，即可推得$\triangle ACD$与$\triangle BCE$面积相等，从而得出$\triangle ACD$与$\triangle BCE$是“偏等积三角形”.

课时3　利用两边及夹角（SAS）判定三角形全等

刷基础

1. A　【解析】因为$AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，所以$\triangle ABC\cong\triangle DCB$（SAS），故选A.

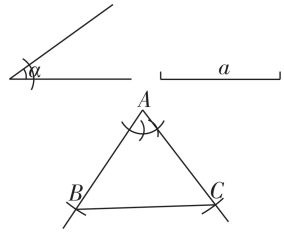
2. C　【解析】由“SAS”可知，选择$\angle B=45°$能画出形状和大小都确定的$\triangle ABC$. 因为$\angle C=45°$，$AB=4$，$BC=2$，而$4>2$，所以$\angle A<45°$，所以$\angle B>90°$，所以添加$\angle C=45°$能画出形状和大小都确定的$\triangle ABC$，所以乙同学可以选择的条件的个数为2. 故选C.

3. 60°　【解析】在$\triangle BDE$与$\triangle CFD$中，$\begin{cases}BD=CF,\\ \angle B=\angle C,\\ BE=CD,\end{cases}$所以$\triangle BDE\cong\triangle CFD$（SAS），所以$\angle BDE=\angle CFD$，所以$\angle EDF=180°-(\angle BDE+\angle CDF)=180°-(\angle CFD+\angle CDF)=\angle C=60°$. 故答案为60°.

4.【解】因为$AB\perp AD$，$AC\perp AE$，所以$\angle BAD=\angle CAE=90°$，所以$\angle BAD+\angle DAC=\angle CAE+\angle DAC$，所以$\angle BAC=\angle DAE$. 在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAE,\\ AC=AE,\end{cases}$所以$\triangle ABC\cong\triangle ADE$（SAS）.

5. B　【解析】根据作图痕迹可以知道，$\angle A$为已知角，AB和AC是已知的边，符合“两边及夹角”，故选B.

6.【解】如图，$\triangle ABC$即为所求作的三角形.



7. B 【解析】

A	可利用 SSS 判定△ABC≌△A′B′C′，故此选项不合题意
B	不能判定△ABC≌△A′B′C′，故此选项符合题意
C	可利用 AAS 判定△ABC≌△A′B′C′，故此选项不合题意
D	可利用 AAS 判定△ABC≌△A′B′C′，故此选项不合题意

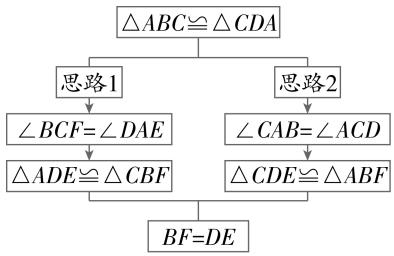
刷有所得 判定全等三角形的一般思路

已知条件	可选择的判定方法	寻找条件
两边对应相等(SS)	“SSS”或“SAS”	第三边或两边的夹角对应相等
一边及其邻角对应相等(SA)	“SAS”或“ASA”或“AAS”	已知角的另一边或另一个角对应相等
两角对应相等(AA)	“ASA”或“AAS”	两角的夹边或其中一角的对边对应相等

刷有所得

利用“AAA”和“SSA”不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角.

8. 思路分析



【解】解法 1：在△ABC 和△CDA 中，$\begin{cases} AB=CD, \\ BC=DA, \\ AC=CA, \end{cases}$

所以△ABC≌△CDA(SSS)，

所以∠BCF=∠DAE.

在△ADE 和△CBF 中，$\begin{cases} AD=BC, \\ \angle DAE=\angle BCF, \\ AE=CF, \end{cases}$

所以△ADE≌△CBF(SAS)，所以 BF=DE.

解法 2：同“解法 1”，得

△ABC≌△CDA(SSS)，

所以∠CAB=∠ACD.

因为 AE=CF，

所以 AE+EF=CF+EF，

即 AF=CE.

在△CDE 和△ABF 中，

因为 CD=AB，∠ACD=∠CAB，CE=AF，

所以△CDE≌△ABF(SAS)，

所以 DE=BF.

刷易错

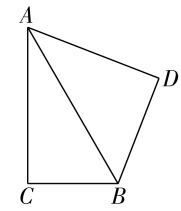
9. C 【解析】A 选项，由∠EBA=∠DCA，加上 BE=CD，∠A 为公共角，则根据“AAS”可判定△ABE≌△ACD，所以 A 选项不符合题意；B 选项，由 OD=OE，∠ABE=∠ACD，∠BOD=∠COE，可得△BOD≌△COE，所以 OB=OC，而 OD=OE，所以 BE=CD，则根据“AAS”可判定△ABE≌△ACD，所以 B 选项不符合题意；C 选项，AD=AE，BE=CD，而∠BAE=∠CAD，所以△ABE 与△ACD 不一定全等，所以 C 选项符合题意；D 选项，BE=CD，BD=CE，BC=CB，则根据“SSS”可判定△BCD≌△CBE，所以∠BDC=∠BEC，则∠ADC=∠AEB，于是根据“AAS”可判定△ABE≌△ACD，所以 D 选项不符合题意. 故选 C.

易错警示

判定两个三角形全等的条件，最容易出错的是“SAS”条件，易错误应用成“SSA”.

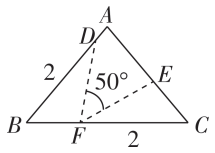
刷提升

1. D 【解析】如图，直角三角形 ACB 和直角三角形 ADB 的斜边都是 AB，但是两三角形不一定全等，即不能画出唯一的三角形，故 A 选项不符合题意；AB=4，BC=3，∠A=30°，不符合全等三角形的判定定理，不能画出唯一的三角形，故 B 选项不符合题意；3+4<8，不符合三角形的三边关系，不能画出三角形，故 C 选项不符合题意；∠A=60°，∠B=45°，AB=4，符合全等三角

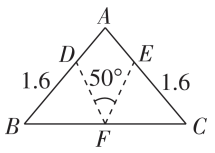


形的判定定理“ASA”，能画出唯一的三角形，故 D 选项符合题意. 故选 D.

2. D 【解析】A 选项，根据 SAS 可以判定剪下的两个三角形全等，故该选项不符合题意. B 选项，根据 SAS 可以判定剪下的两个三角形全等，故该选项不符合题意. C 选项，如图(1)，因为 $\angle DFC=\angle DFE+\angle EFC$ 且 $\angle DFC=180°-\angle BFD=\angle B+\angle BDF$，所以 $\angle DFE+\angle EFC=\angle B+\angle BDF$. 因为 $\angle B=\angle DFE=50°$，所以 $\angle EFC=\angle BDF$. 因为 $BD=FC$，$\angle B=\angle C$，所以 $\triangle DBF\cong\triangle FCE$(ASA)，故该选项不符合题意. D 选项，如图(2)，同 C 选项可得 $\angle EFC=\angle BDF$，由 $\angle B=\angle C$，$BD=CE$ 不能判定 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CFE$ 全等，所以剪下的两个三角形不一定全等，故该选项符合题意. 故选 D.



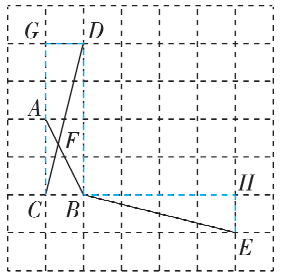
图(1)



图(2)

3. $AD=\frac{1}{2}BC$ 【解析】延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 BE. 因为 AD 是 BC 边上的中线，所以 $CD=BD$. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle EBD$ 中，$\begin{cases}AD=DE,\\ \angle ADC=\angle EDB,\\ CD=BD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ACD\cong\triangle EBD$(SAS)，所以 $AC=BE$，$\angle DAC=\angle DEB$，所以 $AC\parallel BE$，所以 $\angle BAC+\angle ABE=180°$. 因为 $\angle BAC=90°$，所以 $\angle BAC=\angle ABE=90°$. 在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle ABE$ 中，$\begin{cases}AC=BE,\\ \angle BAC=\angle ABE,\\ AB=AB,\end{cases}$ 所以 $\triangle BAC\cong\triangle ABE$(SAS)，所以 $BC=AE$. 因为 $AD=DE=\frac{1}{2}AE$，所以 $AD=\frac{1}{2}BC$.

4. 131° 【解析】如图，取格点 G，H，连接 BD，GD，CG，BH，EH，则 $GD=EH=1$，$CG=BH=4$，$\angle CGD=\angle BHE=90°$，所以 $\triangle CGD\cong\triangle BHE$(SAS)，所以 $\angle GCD=\angle HBE$. 因为 $CG\parallel BD$，所以 $\angle CAB=\angle ABD$. 因为 $\angle CFB=180°-\angle AFC=\angle CAB+\angle GCD=41°$，所以 $\angle ABD+\angle HBE=41°$，所以 $\angle ABE=\angle ABD+\angle DBH+\angle HBE=90°+41°=131°$. 故答案为 131°.



思路分析

(1)过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H. 只要说明 $\triangle ACD\cong\triangle ACH$，$\triangle BCH\cong\triangle BCE$ 即可解决问题. (2)在线段 AB 上截取 $AF=AD$，连接 FC. 只要说明 $\triangle ADC\cong\triangle AFC$，$\triangle CBF\cong\triangle CBE$ 即可解决问题. (3)类比前两问，先画出图形，再通过全等三角形的判定和性质，得出线段相等，从而得到线段 AD，BE，AB 之间的数量关系.

归纳总结

遇中线问题常运用倍长中线法构造全等三角形，将条件转化到同一个三角形中.

5. 【解】(1)因为 $\angle ACB=\angle DCE$，所以 $\angle ACD=\angle BCE$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCE=\angle ACD,\\ EC=DC,\end{cases}$ 所以 $\triangle BCE\cong\triangle ACD$(SAS).

故答案为 $\triangle BCE$，$\triangle ACD$.

(2)①因为 $\angle ACB=\angle DCE$，所以 $\angle ACD=\angle BCE$. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，$\begin{cases}CA=CB,\\ \angle ACD=\angle BCE,\\ CD=CE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ACD\cong\triangle BCE$(SAS)，所以 $AD=BE$.

②因为 $\triangle ACD\cong\triangle BCE$，所以 $\angle CAD=\angle CBE$. 因为 $\angle BAC+\angle ABC=180°-\alpha$，所以易得 $\angle BAM+\angle ABM=180°-\alpha$，所以 $\angle EMD=\angle AMB=180°-(180°-\alpha)=\alpha$.

刷素养

6. 【解】(1) $AD+BE=AB$. 过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H. 因为 $CD\perp AM$，$CH\perp AB$，所以 $\angle ADC=\angle AHC=90°$. 因为 AC，BC 分别平分 $\angle DAB$，$\angle EBA$，所以 $\angle DAC=\angle BAC$，$\angle ABC=\angle EBC$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACH$ 中，$\begin{cases}\angle DAC=\angle BAC,\\ \angle ADC=\angle AHC,\\ AC=AC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ACD\cong\triangle ACH$(AAS)，所以 $AD=AH$.

同理可得 $\triangle BCH\cong\triangle BCE$，所以 $BH=BE$，所以 $AD+BE=AH+BH=AB$.

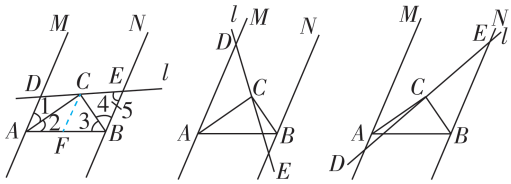
(2)成立. 理由如下：如图(1)，在线段 AB 上截取 $AF=AD$，连接 FC. 因为 AC，BC 分别平分 $\angle MAB$，$\angle NBA$，所以 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AFC$ 中，$\begin{cases}AD=AF,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AC=AC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADC\cong\triangle AFC$(SAS)，所以 $\angle ADC=\angle AFC$. 因为 $MA\parallel NB$，所以 $\angle ADC+\angle 5=180°$. 又因为 $\angle CFB+\angle AFC=180°$，所以 $\angle CFB=\angle 5$.

在△CBF 和△CBE 中，$\begin{cases}\angle CFB=\angle 5,\\ \angle 3=\angle 4,\\ BC=BC,\end{cases}$

所以△CBF≌△CBE(AAS)，所以 $BF=BE$.

因为 $AF+BF=AB$，所以 $AD+BE=AB$.



图(1)　　图(2)　　图(3)

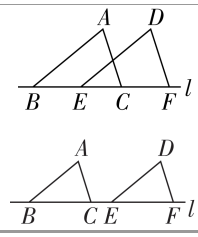
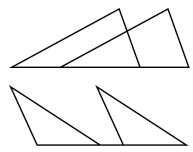
(3)不成立. 如图(2)，当点 D 在射线 AM 上，点 E 在射线 BN 的反向延长线上时，$AD-BE=AB$；如图(3)，当点 D 在射线 AM 的反向延长线上，点 E 在射线 BN 上时，$BE-AD=AB$.

大招专题 2　全等三角形判定的常考模型

刷难关

大招解读 | 平移模型

把△ABC 沿着某一条直线 l 平移，所得到的△DEF 与△ABC 全等.

基本模型	常见模型
	

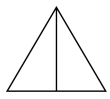
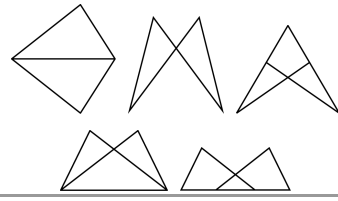
1.【解】因为 $AC\parallel DF$，$BC\parallel EF$，所以 $\angle A=\angle EDF$，$\angle ABC=\angle E$. 又因为 $AC=DF$，所以△ABC≌△DEF(AAS)，所以 $AB=DE$，所以 $AB-BD=DE-BD$，所以 $AD=BE$.

思路分析

由平行线的性质可得相等的角，结合题目条件利用“AAS”说明△ABC≌△DEF，得 $AB=DE$，进而利用线段的和差解决问题.

大招解读 | 对称模型

将两个三角形沿着某一条直线折叠后，直线两边的部分能够完全重合，这两个三角形称为对称型全等三角形，此类图形中要注意隐含条件，即公共边或公共角相等.

基本模型	常见模型
	

2.【解】因为 $\angle BAD=\angle EAC$，所以 $\angle BAD+\angle CAD=\angle EAC+\angle CAD$，即 $\angle BAC=\angle EAD$.

思路分析

(1)根据题意由 $\angle DAB+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$，可得 $\angle DAC=\angle BAE$，再根据“SAS”判定三角形全等；(2)由△BAE≌△DAC，可得 $\angle E=\angle C$，再由三角形内角和为 180° 即可求解.

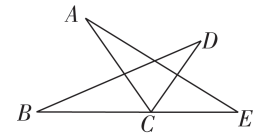
在△BAC 与△EAD 中，$\begin{cases}AB=AE,\\ \angle BAC=\angle EAD,\\ AC=AD,\end{cases}$

所以△BAC≌△EAD(SAS)，所以 $\angle D=\angle C=50°$.

大招解读 | “手拉手”模型

条件：①共顶点，②等角，③两长两短等线段.

结论：△BCD≌△ACE(SAS).



3.【解】(1)因为 $\angle DAB=\angle CAE$，所以 $\angle DAB+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$，所以 $\angle DAC=\angle BAE$.

又因为 $AD=AB$，$AC=AE$，

所以△BAE≌△DAC(SAS).

(2)因为△BAE≌△DAC，所以 $\angle E=\angle C$.

因为 $\angle CAD=125°$，$\angle D=20°$，所以 $\angle C=180°-(\angle CAD+\angle D)=180°-(125°+20°)=35°$，所以 $\angle E=\angle C=35°$.

4.【解】(1) $BD=CE$，$BD\perp CE$. 理由如下：延长 BD 交 CE 于点 F，如图(1)所示.

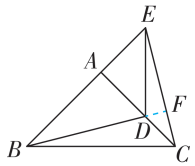
在△ABD 和△ACE 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAC=\angle DAE=90°,\\ AD=AE,\end{cases}$

所以△ABD≌△ACE(SAS)，所以 $\angle ABD=\angle ACE$，$BD=CE$. 因为 $\angle DAE=90°$，所以 $\angle ACE+\angle AEC=90°$，所以 $\angle ABD+\angle AEC=90°$，所以在△$BEF$ 中，$\angle EFB=180°-(\angle ABD+\angle AEC)=90°$，所以 $BD\perp CE$，故 $BD=CE$，$BD\perp CE$.

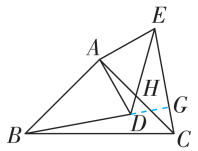
(2)(1)中的结论还成立. 理由如下：延长 BD 交 AC 于点 H，交 CE 于点 G，如图(2)所示. 因为 $\angle BAC=\angle DAE=90°$，所以 $\angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，即 $\angle BAD=\angle CAE$. 在△ABD 和△ACE 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$

所以△ABD≌△ACE(SAS)，所以 $\angle ABD=\angle ACE$，$BD=CE$. 因为 $\angle BAC=90°$，所以 $\angle ABD+\angle AHB=90°$. 因为 $\angle AHB=\angle CHG$，$\angle ABD=\angle ACE$，所以 $\angle CHG+\angle ACE=90°$. 在△$CHG$ 中，$\angle CGH=180°-(\angle CHG+\angle ACE)=$

90°，所以 $BD\perp CE$，故 $BD=CE$，$BD\perp CE$，所以(1)中的结论还成立.



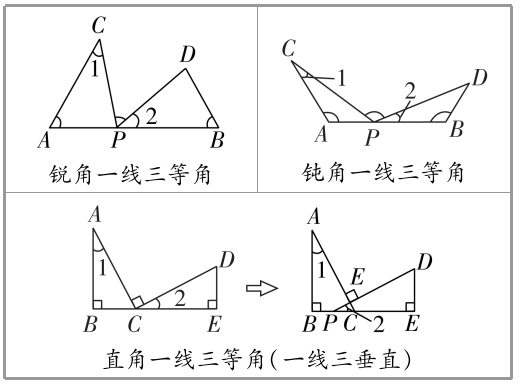
图(1)



图(2)

大招解读｜一线三等角模型(K型)

三个相等的角在同一直线上，称为一线三等角模型(角有锐角、钝角，若为直角则可称为一线三垂直)，利用三等角关系可找到全等三角形所需的角相等条件(如∠1=∠2).



5.【解】(1)因为 $BD\perp$ 直线 m，$CE\perp$ 直线 m，所以 $\angle BDA=\angle CEA=90°$，所以 $\angle BAD+\angle ABD=90°$. 因为 $\angle BAC=90°$，所以 $\angle BAD+\angle CAE=90°$，所以 $\angle CAE=\angle ABD$. 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中，$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=AC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADB\cong\triangle CEA$(AAS)，所以 $BD=AE$，$AD=CE$，所以 $DE=AE+AD=BD+CE$.

(2)仍然成立. 理由：因为 $\angle BDA=\angle BAC=\alpha$，所以 $\angle DBA+\angle BAD=\angle BAD+\angle CAE=180°-\alpha$，所以 $\angle CAE=\angle ABD$. 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中，$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=AC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADB\cong\triangle CEA$(AAS)，所以 $BD=AE$，$AD=CE$，所以 $DE=AE+AD=BD+CE$.

6.【解】(1)①当 $\angle\alpha=90°$ 时，$\angle BEC=\angle CFA=90°$，所以 $\angle BCE+\angle CBE=90°$. 因为 $\angle BCA=90°$，所以 $\angle BCE+\angle ACF=90°$，所以 $\angle ACF=\angle CBE$. 又因为 $AC=BC$，所以 $\triangle BCE\cong\triangle CAF$，所以 $BE=CF$，$CE=AF$. 因为 $CF=CE+EF$，所以 $EF=CF-CE=BE-AF$，故答案为 $EF=BE-AF$.

②当 $\angle\alpha+\angle BCA=180°$ 时，①中的结论仍然成立. 因为 $\angle BEC=\angle CFA=\angle\alpha$，$\angle CBE+\angle BCE+\angle BEC=180°$，$\angle\alpha+\angle ACB=180°$，所以 $\angle ACB=\angle CBE+\angle BCE$. 又因为 $\angle ACB=\angle ACF+\angle BCE$，所以 $\angle CBE=\angle ACF$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CAF$ 中，$\begin{cases}\angle BEC=\angle CFA,\\ \angle CBE=\angle ACF,\\ BC=AC,\end{cases}$ 所以 $\triangle BCE\cong\triangle CAF$(AAS)，所以 $BE=CF$，$CE=AF$，所以 $EF=CF-CE=BE-AF$.

(2)不成立，此时 $EF=BE+AF$. 说明如下：

因为 $\angle BEC=\angle CFA=\angle\alpha$，$\angle\alpha=\angle BCA$，$\angle EBC+\angle BCE+\angle BEC=180°$，$\angle BCE+\angle ACF+\angle ACB=180°$，所以 $\angle EBC=\angle ACF$. 在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle CFA$ 中，$\begin{cases}\angle BEC=\angle CFA,\\ \angle EBC=\angle FCA,\\ BC=CA,\end{cases}$ 所以 $\triangle BEC\cong\triangle CFA$(AAS)，所以 $CE=AF$，$BE=CF$. 因为 $EF=CE+CF$，所以 $EF=BE+AF$.

思路分析

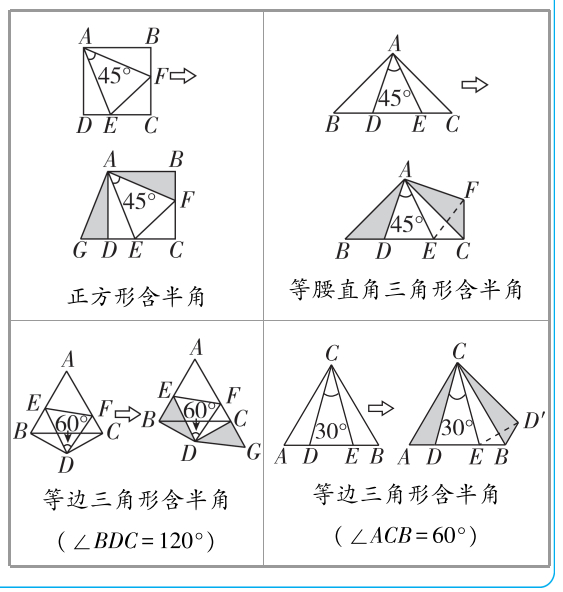
(2)由三角形内角和定理及平角的定义得出 $\angle EBC=\angle ACF$，再根据AAS得出 $\triangle BEC\cong\triangle CFA$，得出 $CE=AF$，$BE=CF$，即可解答.

关键点拨

利用角的和差关系得出 $\angle CAE=\angle ABD$，再利用AAS判定 $\triangle ADB\cong\triangle CEA$ 是解题的关键.

大招解读｜半角模型

半角模型中的重要元素：(1)半角，(2)邻边相等. 半角模型中经常通过旋转将分散的条件集中起来，进而通过说明两个三角形全等进行解题. 半角模型求解中一般涉及两次全等，一次旋转型全等，一次对称型全等.



7.【解】(1)在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中，$\begin{cases}BE=DG,\\ \angle B=\angle ADG,\\ AB=AD,\end{cases}$

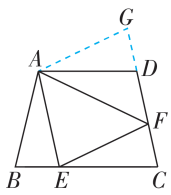
所以 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$(SAS),所以 $AE=AG$,$\angle BAE=\angle DAG$. 因为 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$,所以 $\angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF=\angle BAD-\angle EAF=\angle EAF$,即 $\angle EAF=\angle GAF$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,$\begin{cases}AE=AG,\\ \angle EAF=\angle GAF,\\ AF=AF,\end{cases}$ 所以 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$(SAS),所以 $EF=FG$. 因为 $FG=DG+DF=BE+DF$,所以 $EF=BE+DF$. 故答案为 $EF=BE+DF$.

(2)结论 $EF=BE+DF$ 仍然成立. 理由:

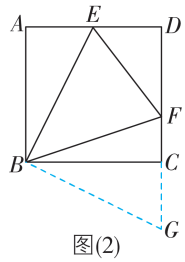
思路分析

(2)延长 FD 到点 G,使 $DG=BE$,连接 AG,即可判定 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$,可得 $AE=AG$,$\angle BAE=\angle DAG$,再判定 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$,可得 $EF=FG$,即可得出结论.

如图(1),延长 FD 到点 G,使 $DG=BE$,连接 AG. 因为 $\angle B+\angle CDA=180°$,$\angle ADG+\angle CDA=180°$,所以 $\angle B=\angle ADG$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,$\begin{cases}BE=DG,\\ \angle B=\angle ADG,\\ AB=AD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$(SAS),所以 $AE=AG$,$\angle BAE=\angle DAG$. 因为 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$,所以 $\angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF=\angle BAD-\angle EAF=\angle EAF$,即 $\angle EAF=\angle GAF$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,$\begin{cases}AE=AG,\\ \angle EAF=\angle GAF,\\ AF=AF,\end{cases}$ 所以 $EF=FG$. 因为 $FG=DG+DF=BE+DF$,所以 $EF=BE+DF$.



图(1)



图(2)

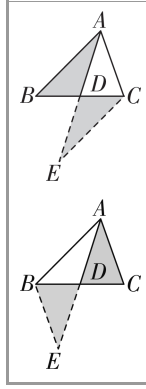
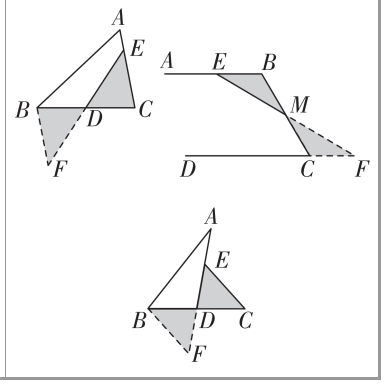
(3)$\triangle DEF$ 的周长是 10. 如图(2),延长 DC 到点 G,使 $CG=AE$,连接 BG. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $\angle A=\angle ABC=\angle BCD=\angle BCG=90°$,$AB=BC$. 在 $\triangle AEB$ 与 $\triangle CGB$ 中,$\begin{cases}AE=CG,\\ \angle A=\angle BCG,\\ AB=CB,\end{cases}$ 所以 $\triangle AEB\cong\triangle CGB$(SAS),所以 $BE=BG$,$\angle ABE=\angle CBG$. 因为 $\angle EBF=45°$,$\angle ABC=90°$,所以 $\angle ABE+\angle CBF=45°$,所以 $\angle CBF+\angle CBG=\angle GBF=45°=\angle EBF$. 在 $\triangle EBF$ 与 $\triangle GBF$ 中,$\begin{cases}BE=BG,\\ \angle EBF=\angle GBF,\\ BF=BF,\end{cases}$ 所以 $\triangle EBF\cong\triangle GBF$(SAS),所以 $EF=GF$,所以 $\triangle DEF$ 的周长为 $EF+ED+DF=AE+CF+DE+DF=AD+CD=5+5=10$.

大招专题 3　构造全等三角形的常用方法

刷难关

大招解读 | 倍长中线法

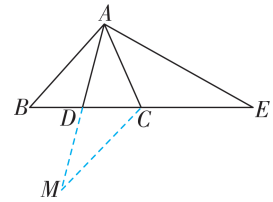
"倍长中线法"就是将三角形的边的中点处的线段延长一倍,以便构造出全等三角形,从而运用全等三角形的有关知识来解决问题的方法.

基本模型	常见模型
	

刷有所得

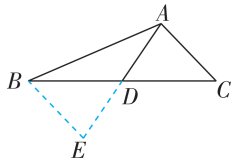
倍长中线的目的是构造全等三角形中的"8 字型",从而根据全等三角形的性质将边或角进行转化.

1.【解】如图,延长 AD 至 M,使 $DM=AD$,连接 CM. 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,所以 $BD=CD$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle MCD$ 中,$\begin{cases}BD=CD,\\ \angle ADB=\angle MDC,\\ AD=MD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABD\cong\triangle MCD$(SAS),所以 $MC=AB$,$\angle B=\angle MCD$. 因为 $AB=CE$,所以 $CM=CE$. 因为 $\angle BAC=\angle BCA$,所以 $\angle B+\angle BAC=\angle MCD+\angle ACB$. 因为 $\angle B+\angle BAC=180°-\angle ACB=\angle ACE$,所以 $\angle ACE=\angle ACM$.



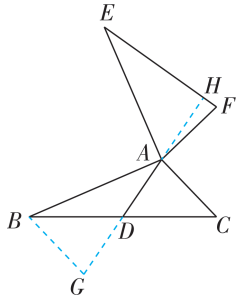
在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ACM$ 中,$\begin{cases}AC=AC,\\ \angle ACE=\angle ACM,\\ CE=CM,\end{cases}$ 所以 $\triangle ACE\cong\triangle ACM$(SAS),所以 $AE=AM$. 因为 $AM=2AD$,所以 $AE=2AD$.

2.【解】(1)如图(1),延长 AD 到 E,使得 $DE=AD$,连接 BE,则 $AE=2AD$. 因为 D 是 BC 的中点,所以 $BD=CD$. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle EBD$ 中,$\begin{cases}CD=BD,\\ \angle ADC=\angle EDB,\\ AD=DE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ACD\cong\triangle EBD$(SAS),所以 $BE=AC$. 在 $\triangle ABE$ 中,由三角形的三边关系可得 $AB-BE<AE<AB+BE$,即 $AB-BE<2AD<AB+BE$. 因为 $AB=9$,$AC=BE=5$,所以 $9-5<2AD<9+5$,所以 $2<AD<7$,所以 BC 边上的中线 AD 的取值范围为 $2<AD<7$.



图(1)

(2) $EF=2AD$ 且 $EF\perp AD$. 理由如下:如图(2),延长 AD 到 G,使得 $AD=DG$,连接 BG,延长 DA 交 EF 于点 H. 同(1)可证 $\triangle ACD\cong\triangle GBD$,所以 $AC=BG$,$\angle DAC=\angle DGB$,所以 $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=\angle BAD+\angle DGB$,所以 $\angle ABG+\angle BAD+\angle DGB=\angle ABG+\angle BAC=180°$. 因为 $\angle BAE=\angle FAC=90°$,所以 $\angle EAF+\angle BAC=180°$,所以 $\angle EAF=\angle ABG$. 因为 $AC=AF$,$AC=BG$,所以 $BG=AF$. 在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle EAF$ 中,$\begin{cases}AB=AE,\\ \angle ABG=\angle EAF,\\ BG=AF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABG\cong\triangle EAF$(SAS),所以 $EF=AG$,$\angle HEA=\angle BAG$. 因为 $AG=2AD$,所以 $EF=2AD$. 因为 $\angle BAE=90°$,所以 $\angle EAH+\angle BAG=90°$. 因为 $\angle HEA=\angle BAG$,所以 $\angle HEA+\angle EAH=90°$,所以 $\angle AHE=90°$,所以 $AD\perp EF$. 综上所述,$EF=2AD$ 且 $EF\perp AD$.



图(2)

大招解读 | 截长补短法

"截长补短法"的具体做法:在某一条线段上截取一条线段与特定线段相等,或将某条线段延长,使之与特定线段相等,再利用全等三角形的有关性质加以说明. 当题目中出现线段和差关系的时候,一般都可以用"截长补短法"求解.

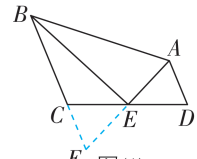
3.【解】$AB=BC+AD$. 理由如下:补短法:如图(1),延长 BC 至点 F,使 $BF=AB$,连接 EF. 因为 $AD/\!/CB$,所以 $\angle CBA+\angle BAD=180°$. 因为 BE 平分 $\angle CBA$,AE 平分 $\angle BAD$,所以 $\angle ABE=\angle FBE$,$\angle EAB=\angle EAD$,所以 $\angle EBA+\angle BAE=90°$,所以 $\angle BEA=180°-90°=90°$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 中,$\begin{cases}AB=FB,\\ \angle ABE=\angle FBE,\\ BE=BE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle FBE$(SAS),所以 $\angle BEA=\angle BEF=90°$,$AE=FE$,所以 A,E,F 三点共线. 因为 $AD/\!/CB$,所以 $\angle EAD=\angle F$.

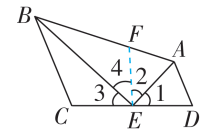
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中,$\begin{cases}\angle EAD=\angle F,\\ AE=EF,\\ \angle AED=\angle FEC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$(ASA),所以 $AD=CF$,所以 $AB=BF=BC+CF=BC+AD$.

思路分析

由于 AB 与 AD 和 BC 之间没有什么直接的联系,所以必须通过作辅助线建立 AB 与 AD,BC 之间的联系,进而可求解. 可以在 AB 上截取 $AF=AD$,连接 EF;也可延长 BC 至点 F,使 $BF=AB$,连接 EF,构造全等三角形,进而得出三条线段之间的关系.



图(1)



图(2)

截长法:如图(2),在 AB 上截取 $AF=AD$,连接 EF. 因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle ABC+\angle DAB=180°$. 又因为 BE 平分 $\angle ABC$,AE 平分 $\angle DAB$,所以 $\angle ABE=\angle CBE$,$\angle EAD=\angle BAE$,所以 $\angle ABE+\angle EAB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle DAB)=90°$,所以 $\angle AEB=90°$,即 $\angle 2+\angle 4=90°$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AFE$ 中,$\begin{cases}AD=AF,\\ \angle DAE=\angle FAE,\\ AE=AE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADE\cong\triangle AFE$(SAS),所以 $\angle 1=\angle 2$. 因为 $\angle 2+\angle 4=90°$,所以 $\angle 1+\angle 3=90°$,所以 $\angle 3=\angle 4$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BFE$ 中,$\begin{cases}\angle CBE=\angle FBE,\\ BE=BE,\\ \angle 3=\angle 4,\end{cases}$ 所以 $\triangle BCE\cong\triangle BFE$(ASA),所以 $BC=BF$,所以 $AB=AF+BF=AD+BC$.

刷有所得

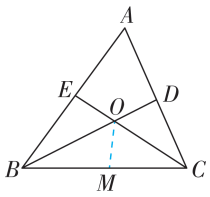
解题时用截长法还是补短法,可以根据题目条件灵活选择.

4.【解】(1)因为 BD 平分 $\angle ABC$,CE 平分 $\angle ACB$,所以 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$,所以 $\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}\angle A+90°$.

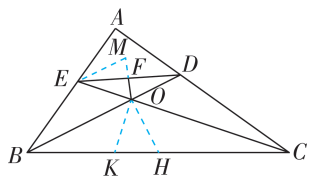
(2) $BE+CD=BC$. 如图(1),在 BC 上截取

$BM=BE$，连接 OM. 因为 $\angle A=60°$，所以 $\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A+90°=120°$，所以 $\angle BOE=\angle DOC=60°$. 因为 BD 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle EBO=\angle MBO$. 又因为 $OB=OB$，所以 $\triangle BOE\cong\triangle BOM$（SAS），所以 $\angle BOE=\angle BOM=60°$，所以 $\angle MOC=60°$. 因为 CO 平分 $\angle DCM$，所以 $\angle DCO=\angle MCO$. 在 $\triangle DCO$ 与 $\triangle MCO$ 中，$\begin{cases}\angle DCO=\angle MCO,\\ OC=OC,\\ \angle DOC=\angle MOC=60°,\end{cases}$ 所以 $\triangle DCO\cong\triangle MCO$（ASA），所以 $CM=CD$，所以 $BC=BM+CM=BE+CD$.

（3）如图（2），延长 OF 至点 M，使 $MF=OF$，连接 EM，所以 $OM=2OF$. 因为 F 是 ED 的中点，所以 $EF=DF$. 又因为 $\angle DFO=\angle EFM$，所以 $\triangle ODF\cong\triangle MEF$（SAS），所以 $OD=EM$. 过点 O 作 CE，BD 的垂线，分别交 BC 于点 K，H，所以 $\angle KOC=90°$，所以 $\angle OCK+\angle OKC=90°$. 因为 $\angle A=90°$，所以 $\angle ACE+\angle AEC=90°$. 因为 $\angle ACE=\angle OCK$，所以 $\angle AEO=\angle OKC$，所以 $\angle BEO=\angle BKO$. 又因为 $\angle EBO=\angle KBO$，$BO=OB$，所以 $\triangle OBE\cong\triangle OBK$（AAS），同理可得 $\triangle ODC\cong\triangle OHC$（AAS），所以 $EO=OK$，$OD=OH=EM$，$BE=BK$，$CD=CH$. 由（1）可知 $\angle DOE=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A+90°=\frac{1}{2}\times90°+90°=135°$，所以 $\angle BOE=\angle COD=45°$，所以 $\angle BOK=\angle COH=45°$，所以 $\angle KOH=90°-\angle BOK=45°$. 因为 $\triangle DOF\cong\triangle EMF$，所以 $\angle EMF=\angle FOD$，所以 $EM/\!/OD$，所以 $\angle MEO=180°-135°=45°=\angle KOH$，所以 $\triangle OME\cong\triangle KHO$（SAS），所以 $KH=OM$，所以 $KH=2OF$. 因为 $BC-BK-CH=KH=2OF$，所以 $BC-BE-CD=KH=2OF$.



图（1）



图（2）

思路分析

(3)利用ASA可判定 $\triangle ACP\cong\triangle ECQ$，得到 $AP=EQ$，再分两种情况讨论即可得到答案.

思路分析

(1)由 $\angle DCB=\angle EBC=\frac{1}{2}\angle A$，得 $\angle BOD=\angle COE=\angle DCB+\angle EBC=\angle A$，所以与 $\angle A$ 相等的角是 $\angle BOD$ 及 $\angle COE$，写出其中的一个角即可.

重难专题 6　全等三角形中的探究型问题

刷难关

1.【解】（1）由条件可以使结论成立的组合方式有①②③为条件，④为结论；①②④为条件，③为结论.

（2）选择①②③为条件，④为结论. 因为 $\angle DCA=\angle ECB$，所以 $\angle DCA+\angle ACE=\angle ECB+\angle ACE$，即 $\angle DCE=\angle ACB$. 因为 $AC=DC$，$BC=EC$，所以 $\triangle DCE\cong\triangle ACB$，所以 $AB=DE$.（选择①②④为条件，③为结论进行说明亦可）

2.【解】存在，$\triangle ADC\cong\triangle CEB$. 理由如下：

因为 $AD\perp CE$，$BE\perp CE$，

所以 $\angle ACB=\angle ADC=\angle CEB=90°$，

所以 $\angle ACD+\angle CAD=180°-\angle ADC=90°$，

$\angle ACD+\angle ECB=90°$，所以 $\angle CAD=\angle ECB$.

因为 $AC=CB$，所以 $\triangle ADC\cong\triangle CEB$（AAS）.

3.【解】（1）根据题意得，点 P 从 A 向 B 运动时，$AP=2t$ cm，则 $BP=(8-2t)$ cm，故答案为 $(8-2t)$.

（2）在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中，$\begin{cases}AC=EC,\\ \angle ACB=\angle ECD,\\ BC=DC,\end{cases}$

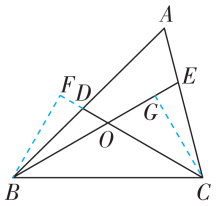
所以 $\triangle ABC\cong\triangle EDC$（SAS），所以 $AB=ED$.

（3）根据题意得 $DQ=t$ cm. 因为 $\triangle ABC\cong\triangle EDC$，所以 $\angle A=\angle E$，$DE=AB=8$ cm，所以 $EQ=(8-t)$ cm. 连接 PQ，因为 P，Q，C 三点共线，所以 $\angle ACP=\angle ECQ$. 在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ECQ$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle E,\\ AC=EC,\\ \angle ACP=\angle ECQ,\end{cases}$ 所以 $\triangle ACP\cong\triangle ECQ$（ASA），所以 $AP=EQ$，所以当 $0\leqslant t\leqslant4$ 时，$2t=8-t$，解得 $t=\frac{8}{3}$，当 $4<t\leqslant8$ 时，$AP=(16-2t)$ cm，所以 $16-2t=8-t$，解得 $t=8$. 综上所述，当 P，C，Q 三点共线时，t 的值为 8 或 $\frac{8}{3}$.

4.【解】（1）与 $\angle A$ 相等的角是 $\angle BOD$.（答案不唯一）因为 $\angle BOD=180°-\angle BOC=180°-(180°-\angle OBC-\angle OCB)=\angle OBC+\angle OCB$，$\angle DCB=$

$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle A$，所以 $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle A=\angle A$.

(2)猜想：$BD=CE$. 说明如下：如图，作 $CG\perp BE$ 交 BE 于点 G，作 $BF\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 F，所以 $\angle BFO=\angle OGC=90°$.



在 $\triangle CBF$ 和 $\triangle BCG$ 中，$\begin{cases}\angle FCB=\angle GBC,\\ \angle BFC=\angle BGC,\\ CB=BC,\end{cases}$

所以 $\triangle CBF\cong\triangle BCG$，所以 $BF=CG$.

因为 $\angle BDF=180°-\angle BDO=180°-(180°-\angle ABE-\angle BOD)=\angle ABE+\angle BOD$，$\angle BEC=180°-\angle AEB=180°-(180°-\angle ABE-\angle A)=\angle ABE+\angle A$，由(1)知 $\angle A=\angle BOD$，所以 $\angle BDF=\angle BEC$.

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CEG$ 中，$\begin{cases}\angle DFB=\angle EGC=90°,\\ \angle BDF=\angle GEC,\\ FB=GC,\end{cases}$

所以 $\triangle BDF\cong\triangle CEG$(AAS)，所以 $BD=CE$.

关键点拨

(2)分析题意可知，通过作高可以构造一对三角形，BD，CE 分别是这对三角形的一条边，然后由另一对全等三角形提供条件，从而判定 BD，CE 所在两个三角形全等，即可得出结论.

4　利用三角形全等测距离

刷基础

1. C　【解析】因为 AP 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle EAD=\angle FAD$. 在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AE=AF,\\ \angle EAD=\angle FAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

所以 $\triangle ADE\cong\triangle ADF$(SAS)，所以 $DF=DE$，即新支杆的长度应与 DE 的长度相等，故选 C.

2. 16　【解析】因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle ABP=\angle CDP$. 因为 $PD\perp CD$，所以 $\angle CDP=90°$，所以 $\angle ABP=90°$，即 $PB\perp AB$. 因为相邻两平行线间的距离相等，所以 $PD=PB$.

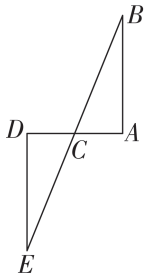
在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 中，$\begin{cases}\angle ABP=\angle CDP,\\ PB=PD,\\ \angle APB=\angle CPD,\end{cases}$

所以 $\triangle ABP\cong\triangle CDP$(ASA)，所以 $AB=CD=16$ 米. 故答案为 16.

思路分析

由 $AB\parallel CD$，利用平行线的性质可得 $\angle ABP=\angle CDP$，利用"ASA"可判定 $\triangle ABP\cong\triangle CDP$，由全等三角形的性质可得结果.

3. 25　【解析】所画示意图如图所示.



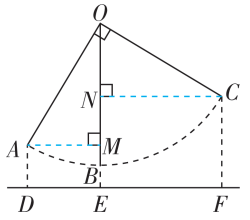
由题意知 $AC=DC=20$ 步.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$\begin{cases}\angle A=\angle D=90°,\\ AC=DC,\\ \angle ACB=\angle DCE,\end{cases}$

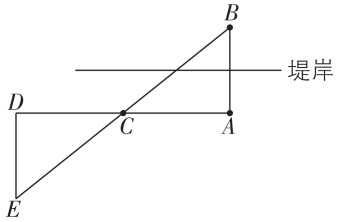
所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEC$(ASA)，所以 $AB=DE$. 又因为小强一共走了 90 步，其中走完 AD 用了 40 步，所以走完 DE 用了 50 步. 因为小强一步大约 50 厘米，50 厘米 $=0.5$ 米，所以 $AB=DE=50\times0.5=25$(米)，故小强在点 A 处时他与电线塔的距离为 25 米，故答案为 25.

4. 1.5　【解析】如图，过点 A 作 $AM\perp OE$ 于 M，过点 C 作 $CN\perp OE$ 于 N. 由题意得，$AD\perp DF$，$OE\perp DF$，$CF\perp DF$，则



$OE\parallel CF$，$CN\parallel EF$，所以 $CN=EF=2$ m，$CF=EN$，同理可得 $ME=AD=0.7$ m，$AM=DE=1.2$ m. 因为 $\angle AOC=\angle AMO=\angle ONC=90°$，所以 $\angle AOM=\angle OCN=90°-\angle CON$. 在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle OCN$ 中，$\begin{cases}\angle AOM=\angle OCN,\\ \angle AMO=\angle ONC,\\ OA=CO,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOM\cong\triangle OCN$(AAS)，所以 $OM=CN=2$ m，$AM=ON=1.2$ m，所以 $MN=OM-ON=0.8$ m，所以 $CF=EN=MN+ME=1.5$ m. 故答案为 1.5.

5.【解】(1)测量方案示意图如图所示.



(2)因为 AC 与堤岸平行，AB 与堤岸垂直，所以 $AB\perp AC$，所以 $\angle A=90°$. 由题意得 $\angle D=90°$，所以 $\angle A=\angle D$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ AC=DC,\\ \angle ACB=\angle DCE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEC$(ASA)，所以 $AB=DE=8$ m，所以凉亭 A 与游艇 B 之间的距离是 8 m.

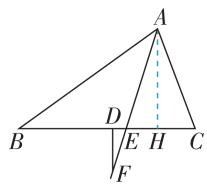
☆ 问题解决策略:特殊化

刷提升

【解】(1)因为 $AD\perp BC$,所以 $\angle EAD=90^\circ-\angle AED$. 因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$. 因为 $\angle BAC=180^\circ-(\angle B+\angle C)$,所以 $\angle BAE=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$. 又因为 $\angle AED=180^\circ-\angle AEB=\angle B+\angle BAE=\angle B+90^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$,所以 $\angle EAD=90^\circ-\angle AED=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$,所以 $\alpha=\frac{1}{2}\times(70^\circ-30^\circ)=20^\circ$. 故答案为 20°,$\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

(2)过点 A 作 $AG\perp BC$ 于 G. 因为 $AG\perp BC$,$FD\perp BC$,所以 $AG/\!/FD$,所以 $\angle DFE=\angle EAG$. 因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,$AG\perp BC$,所以由(1)的结论得 $\angle EAG=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$,所以 $\angle DFE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$. 因为 $\angle B=35^\circ$,$\angle C=75^\circ$,所以 $\angle DFE=\frac{1}{2}\times(75^\circ-35^\circ)=20^\circ$.

(3) $\angle DFE$ 与 $\angle B$,$\angle C$ 之间的数量关系是 $\angle DFE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$. 理由如下:过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H,如图所示. 因为 $FD\perp BC$,所以 $FD/\!/AH$,所以 $\angle DFE=\angle EAH$. 因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,$AH\perp BC$,所以由(1)的结论得 $\angle EAH=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$,所以 $\angle DFE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.



思路分析

(2)由 $FD\perp BC$,$AG\perp BC$,得 $AG/\!/DF$,再由平行线的性质得出 $\angle DFE=\angle EAG$,再应用(1)的结论求解即可.

全章综合训练

刷中考

1. C 【解析】因为 $\angle BAC=60^\circ$,$\angle B=50^\circ$,所以 $\angle C=180^\circ-\angle BAC-\angle B=180^\circ-60^\circ-50^\circ=70^\circ$. 因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle 1=\angle C=70^\circ$,故选 C.

2. B 【解析】1+2=3,不能搭成三角形,故 A 选项不符合题意;2+3>4,能搭成三角形,故 B 选项符合题意;3+5=8,不能搭成三角形,故 C 选项不符合题意;4+5<10,不能搭成三角形,故 D 选项不符合题意. 故选 B.

3. C 【解析】由题意得 $\triangle ABD$,$\triangle ABC$,$\triangle ADC$,$\triangle ADE$ 均为直角三角形,所以共有 4 个直角三角形. 故选 C.

4. C 【解析】因为 $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$,$\angle A=60^\circ$,$\angle B=40^\circ$,所以 $\angle ACB=180^\circ-60^\circ-40^\circ=80^\circ$. 因为 $\triangle ABC\cong\triangle DEC$,所以 $\angle DCE=\angle ACB=80^\circ$. 故选 C.

5. B 【解析】在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中,$\begin{cases}OA=OC,\\ \angle AOB=\angle COD,\\ OB=OD,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOB\cong\triangle COD$(SAS). 故选 B.

6. A 【解析】由作图方法可知判定 $\triangle C'O'D'\cong\triangle COD$ 的依据是三边分别相等的两个三角形全等,故选 A.

关键点拨

作一个角等于已知角的作图依据:在这个基本作图中,作图的依据是三边分别相等的两个三角形全等.

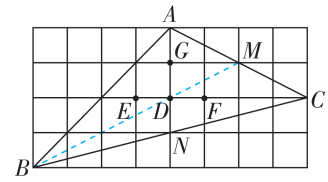
7. $DE=EF$(答案不唯一) 【解析】因为 $CF/\!/AB$,所以 $\angle A=\angle ECF$,$\angle ADE=\angle CFE$,所以添加条件 $DE=EF$,可以使得 $\triangle ADE\cong\triangle CFE$(AAS);添加条件 $AD=CF$,可以使得 $\triangle ADE\cong\triangle CFE$(ASA). 故答案为 $DE=EF$(答案不唯一).

8. 【解】(1)因为 $AB/\!/DE$,所以 $\angle B=\angle E$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ \angle A=\angle D,\\ AC=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(AAS).

(2)由(1)可知 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$,所以 $BC=EF$,所以 $BF+CF=EC+CF$,所以 $BF=EC$. 因为 $BF=4$,$FC=3$,所以 $EC=4$,所以 $BE=BF+FC+EC=4+3+4=11$.

刷章测

1. B 【解析】取 BC 的中点 N,取 AC 的中点 M,连接 AN,BM,如图所示,则 AN 与 BM 的交点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心. 故选 B.



关键点拨

三角形的重心是三角形三条中线的交点.

2. D 【解析】A 选项,因为 2+4=6,所以不能围成三角形;B 选项,因为 3+3=6,所以不能围成三角形;C 选项,因为 2+3<7,所以不能围成三角形;D 选项,因为 2+5>5,所以能围成三角

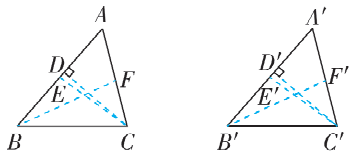
形. 故选 D.

3. B 【解析】由题意可知,为了使窗框稳固,需要在窗框上钉一根木条,根据三角形具有稳定性,这根木条钉在 E,G 两点之间时,不能构成三角形,所以不应该钉在 E,G 两点之间. 故选 B.

4. B 【解析】由题意可知,$\angle BAC=30°$,$\angle ACB=90°$,所以 $\angle ABC=180°-90°-30°=60°$. 因为 $\angle ABD=19°$,所以 $\angle DBE=60°-19°=41°$. 因为 $\angle DEF=90°$,$\angle EDF=45°$,所以 $\angle EFD=180°-90°-45°=45°$,所以 $\angle BDF=180°-41°-45°=94°$. 故选 B.

5. C 【解析】因为 $\angle CAB=90°$,AD 是 $\angle CAB$ 的平分线,所以 $\angle CAD=\frac{1}{2}\times 90°=45°$. 因为 $CE\perp AD$,所以 $\angle AEC=90°$,所以 $\angle ACE=90°-45°=45°$. 又因为 $\angle CAB=90°$,$\angle ABC=72°$,所以 $\angle ACB=90°-72°=18°$,所以 $\angle ECD=\angle ACE-\angle ACB=45°-18°=27°$. 故选 C.

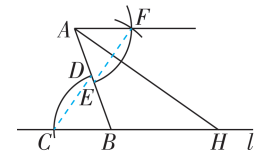
6. C 【解析】A 选项,因为 $AB=A'B'$,$\angle B=\angle B'$,$BC=B'C'$,根据 SAS 可以得到 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,故 A 选项不符合题意. B 选项,如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,过点 C' 作 $C'D'\perp A'B'$ 于点 B',则 $CD=C'D'$. 因为 $\angle ABC=\angle A'B'C'$,$\angle CDB=\angle C'D'B'=90°$,所以 $\triangle DBC\cong\triangle D'B'C'$,所以 $BC=B'C'$,所以由 A 选项知 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,故 B 选项不符合题意. C 选项,分别作边 AB 和 $A'B'$ 上的中线 CE 和 $C'E'$,交 $AB,A'B'$ 于点 E,E',则 $CE=C'E'$,所以 $BE=\frac{1}{2}AB$,$B'E'=\frac{1}{2}A'B'$. 因为 $AB=A'B'$,所以 $BE=B'E'$,由已知条件不能得到 $\triangle EBC\cong\triangle E'B'C'$,则不能得到 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,故 C 选项符合题意. D 选项,分别作 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 的平分线 BF,BF',交 $AC,A'C'$ 于点 F,F',则 $BF=B'F'$,所以 $\angle ABF=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle A'B'F'=\frac{1}{2}\angle A'B'C'$. 因为 $\angle ABC=\angle A'B'C'$,所以 $\angle ABF=\angle A'B'F'$. 又因为 $AB=A'B'$,所以 $\triangle ABF\cong\triangle A'B'F'$,所以 $\angle A=\angle A'$,所以 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,故 D 选项不符合题意. 故选 C.



7. C 【解析】因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,所以 $\angle BAD=\angle CAD$. 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中,$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$,所以题图(1)中有 1 对全等三角形. 同理,题图(2)中,$\triangle ABE\cong\triangle ACE$,所以 $BE=EC$. 因为 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$,所以 $BD=CD$. 又因为 $DE=DE$,所以 $\triangle BDE\cong\triangle CDE$,所以题图(2)中有 3 对全等三角形. 同理,题图(3)中有 6 对全等三角形……由此发现:第 n 个图形中全等三角形的对数是 $\frac{n(n+1)}{2}$. 故选 C.

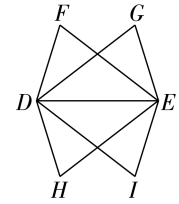
8. 100(答案不唯一) 【解析】在钝角三角形中,设最大角为 α,则其度数的取值范围是 $90°<\alpha<180°$,所以最大角的度数可能是 100°,故答案为 100(答案不唯一).

9. 35° 【解析】如图,连接 CD,EF. 由题目中尺规作图可知 $BD=BC=AE=AF$,$CD=EF$. 在 $\triangle CDB$ 和 $\triangle FEA$ 中,$\begin{cases}CD=FE,\\ BD=AE,\\ CB=FA,\end{cases}$ 所以 $\triangle CDB\cong\triangle FEA$(SSS),所以 $\angle CBA=\angle EAF=70°$,所以 $AF/\!/CB$,所以 $\angle FAH=\angle AHB$. 因为 AH 平分 $\angle BAF$,所以 $\angle FAH=\angle BAH=\frac{1}{2}\angle BAF=35°$. 因为 $\angle AHB=\angle FAH$,所以 $\angle AHB=35°$. 故答案为 35°.



10. 2 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,AD 为 BC 边上的中线,所以 $BD=DC$,所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$. 又因为 $DE\perp AB$ 于 E,$DF\perp AC$ 于 F,$AB=3$,$AC=4$,$DF=1.5$,所以 $\frac{1}{2}AB\cdot ED=\frac{1}{2}AC\cdot DF$,即 $\frac{1}{2}\times 3\times ED=\frac{1}{2}\times 4\times 1.5$,解得 $ED=2$,故答案为 2.

11. 4 【解析】如图,$\triangle DEF$,$\triangle DEG$,$\triangle DEH$,$\triangle DEI$ 为所求作的三角形,即这样的三角形最多可以画出 4 个.



12. 7 【解析】如图,延长 AD,CB 交于点 E. 因为 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线,所以 $\angle ACD=\angle ECD$.

思路分析

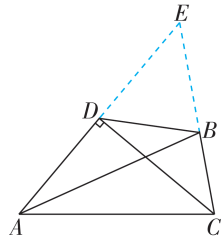
根据各选项提供的条件,分别画出图形,结合全等三角形的判定与性质解答即可.

关键点拨

根据中线找到面积相等的三角形是解题的关键.

在△ACD 和△ECD 中，$\begin{cases}\angle ACD=\angle ECD,\\ CD=CD,\\ \angle ADC=\angle EDC=90^\circ,\end{cases}$

所以 △ACD ≌ △ECD（ASA），所以 $AC=EC=a+3$，$AD=ED$. 因为 $CB=a-1$，所以 $BE=a+3-(a-1)=4$. 因为 $AD=ED$，所以 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ABE}=1:2$. 当 $BE\perp AB$ 时，△ABE 面积取得最大值，为 $\frac{1}{2}\times7\times4=14$，所以△$ABD$ 面积的最大值为 7. 故答案为 7.



思路分析

延长 AD，CB 交于点 E，首先利用“ASA”得到△ACD≌△ECD，由全等三角形的性质可得 $AC=EC=a+3$，$AD=ED$，进而可求得 $BE=4$，$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ABE}=1:2$，确定△$ABE$ 面积的最大值，即可得到△ABD 面积的最大值.

13. (1)三角形具有稳定性

(2)【解】CB 的长度是 40 cm. 理由：

因为 O 是 AB 和 CD 的中点，

所以 $AO=BO$，$CO=DO$.

在△AOD 和△BOC 中，$\begin{cases}AO=BO,\\ \angle AOD=\angle BOC,\\ DO=CO,\end{cases}$

所以△AOD≌△BOC(SAS)，所以 $BC=AD$.

又因为 $AD=40$ cm，所以 $BC=AD=40$ cm.

14.【解】(1)由题意得，$\angle ABD$ 和 $\angle CBD$ 的大小关系是 $\angle ABD=\angle CBD$，直线 BC，AE 的位置关系是 $BC\perp AE$. 故答案为 $\angle ABD=\angle CBD$，$BC\perp AE$.

(2) $\angle DBF=\angle BDF$. 理由如下：由(1)得 $\angle CBD=\angle FBD$，$AE\perp BC$. 由题意得 $AE\perp DF$，所以 $DF/\!/BC$，所以 $\angle CBD=\angle FDB$，所以 $\angle DBF=\angle BDF$.

(3) $\angle BDC=103^\circ$.

因为 $\angle ABC=58^\circ$，$\angle ACB=48^\circ$，

所以 $\angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB=74^\circ$.

因为 $\angle ABD=\angle CBD$，

所以 $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=29^\circ$，

所以 $\angle ADB=180^\circ-\angle ABD-\angle BAC=180^\circ-29^\circ-74^\circ=77^\circ$，

所以 $\angle BDC=180^\circ-77^\circ=103^\circ$.

第五章　图形的轴对称

1　轴对称及其性质

刷基础

1. C　【解析】根据轴对称图形的定义可知，C 选项的图案中能找到这样一条直线，使其沿这条直线折叠后直线两旁的部分能够完全重合. 通过观察可知，A，B，D 选项的图案都不具备这个特点，故选 C.

2. D　【解析】A 选项，是轴对称图形，对称轴的条数为 2，故此选项不符合题意；B 选项，是轴对称图形，对称轴的条数为 2，故此选项不符合题意；C 选项，是轴对称图形，对称轴的条数为 2，故此选项不符合题意；D 选项，是轴对称图形，对称轴的条数为 3，故此选项符合题意. 故选 D.

3. D　【解析】A、B、C 选项中，两个字母“E”关于直线 l 成轴对称，而 D 选项中，两个字母“E”沿着直线 l 翻折后不能互相重合. 故选 D.

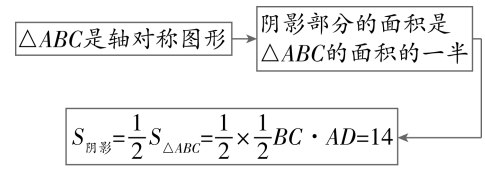
4. 2　【解析】与标号“1”的三角形成轴对称的三角形的标号为“2”和“4”，共 2 个. 故答案为 2.

技巧点拨

判断图形是不是轴对称图形时，可以通过观察这个图形是否有两部分关于某条直线折叠后重合来判断，若有则是轴对称图形，否则不是轴对称图形.

5. B　【解析】因为直线 MN 是四边形 $AMBN$ 的对称轴，所以 $AM=BM$，$AN=BN$，$\angle ANM=\angle BNM$. 因为点 P 是直线 MN 上的点，所以 $\angle MAP=\angle MBP$，但无法推出 $AP=BN$，故 A、C、D 选项不符合题意，B 选项符合题意.

6. 14　【解析】



7.【解】(1)因为△ABC 与△ADE 关于直线 MN 对称，$ED=4$ cm，$FC=1$ cm，所以 $BC=ED=4$ cm，所以 $BF=BC-FC=3$ cm.

(2)因为△ABC 与△ADE 关于直线 MN 对称，$\angle BAC=76^\circ$，$\angle EAC=58^\circ$，所以 $\angle EAD=\angle BAC=76^\circ$，所以 $\angle CAD=\angle EAD-\angle EAC=76^\circ-58^\circ=18^\circ$.

(3)因为△ABC 与△ADE 关于直线 MN 对称，点 E 和点 C 是对应点，所以直线 MN 垂直平分线段 EC.